

ZHANG Jingke, LI Huichao. Two upstream splitting schemes for generalized Lagrange multiplier magnetohydrodynamics (in Chinese). *Chin. J. Space Sci.*, 2017, **37**(1): 8-18. DOI:10.11728/cjss2017.01.008

广义拉格朗日乘子 MHD 方程组的 两类逆风分裂格式^{*}

张璟珂 李会超

(中国科学院国家空间科学中心 空间天气学国家重点实验室 北京 100190)

(中国科学院大学 北京 100049)

摘 要 开发高性能的磁流体力学数值模拟方法是提高空间天气数值预报研究的一个重要方面. 有限体积法的逆风分裂格式具有良好的间断捕获能力, Steger-Warming 和 AUSM (Advection Upstream Splitting Method) 是逆风分裂格式 FVS (Flux Vector Splitting) 方法中具有代表性的两种格式. 采用这两种格式求解具有伽利略不变性的扩展型广义拉格朗日乘子磁流体力学 (EGLM-MHD) 方程组, 对 Orszag-Tang 涡流问题和三维爆炸波问题进行数值模拟, 结果表明两种格式均能得到稳定精确的数值结果. 与 Steger-Warming 格式相比, AUSM 格式产生的磁场散度误差更小, 计算速度更快.

关键词 磁流体力学数值模拟, Steger-Warming 格式, AUSM 格式

中图分类号 P 353

Two Upstream Splitting Schemes for Generalized Lagrange Multiplier Magnetohydrodynamics

ZHANG Jingke LI Huichao

(State Key Laboratory of Space Weather, National Space Science Center, Chinese Academy
of Sciences, Beijing 100190)

(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract To develop a high performance MHD numerical simulation method is an important factor in research of numerical prediction of space weather. The upwind flux splitting scheme based on finite volume method has good ability to capture discontinuities. Steger-Warming and AUSM (Advection Upstream Splitting Method) schemes are two outstanding upwind flux splitting scheme, which are classified as FVS (Flux Vector Splitting) method. In this paper, these two schemes are applied to solve the Extended Generalized Lagrange Multiplier Magnetohydrodynamics (EGLM-MHD) equation with Galilean invariance. Results obtained from Orszag-Tang vortex and three-dimensional blastwave problem indicate that those two schemes are both robust and accurate. Particularly, AUSM scheme

* 国家自然科学基金项目资助 (41231068, 41204127)

2015-05-18 收到原稿, 2016-09-11 收到修定稿

E-mail: hcli@spaceweather.ac.cn

is superior to Steger-Warming scheme in divergence error control and computational speed.

Key words MHD numerical simulation, Steger-Warming scheme, AUSM scheme

0 引言

近年来, 空间天气预报由经验预报向数值预报发展的需求越来越强. 磁流体力学 (MHD) 数值模拟可以丰富、自洽地实现空间天气数值预报, 目前已有大量研究工作^[1], 内容涵盖日冕磁场结构^[2,3]、背景太阳风结构^[4]、日冕物质抛射事件^[5]、太阳风-磁层相互作用^[6]等日地关系链中多个领域, 取得了一定进展. 但是现有研究结果表明空间天气数值预报方法还有很大改进空间, 例如某些情况下预报精度不高或不够快捷高效等. 因此, 开发高性能的磁流体力学数值模拟方法是提高空间天气数值预报研究的一个重要方面^[7].

在空间天气预报相关物理现象中, 通常包含有激波、接触间断等间断结构. 数值求解方法中的逆风类求解方法被认为是捕捉间断的最佳方法之一, 在计算高速流动问题时比中心差分方法更加有效^[8]. 逆风类求解方法主要分为 FDS (Flux Difference Splitting) 和 FVS (Flux Vector Splitting), 其中 FDS 方法包括 Roe 格式^[9]、HLL 格式 (Harten, Lax and Van Leer)^[10]等, 而 FVS 方法包括 Steger-Warming 格式^[11]、Van-Leer 格式^[12]及 AUSM 格式^[13]等.

MacCormack^[14]提出一种逆风求解方法, 在不改变 MHD 方程解的前提下, 将方程由一阶非齐次变为一阶齐次, 从而可以采用逆风分裂方法来求解. 但是 MacCormack 在对方程雅可比矩阵进行逆风分裂时使用的是 Steger-Warming 方法, 其稳定性有所欠缺. 若采用熵修正方法来增加算法的稳定性, 会因引入较大粘性而使计算精度降低. Pan 等^[15]提出一种基于磁马赫数的雅可比矩阵分裂方法, 该方法可以使算法更加稳定且粘性耗散更小.

另一种重要的逆风求解方法是 AUSM 格式^[13], 其将流量分为流动项和压力项, 根据网格界面马赫数计算流量. 采用 AUSM 格式不用计算通量雅可比矩阵的特征值和特征向量, 计算效率较高.

在三维 MHD 数值模拟过程中会产生磁场散度不为零的误差, 其可使计算结果出现非物理结构, 甚至使计算崩溃. 因此应保持磁场散度为零, 消除误

差^[16]. 磁场散度处理方法主要有四种: CT (Constrained Transport) 方法^[18]需要使用交错网格, 较为繁琐; Powell 提出的八波模型^[19]在某些情况下会在间断附近产生不正确的结果; 泊松校正法^[17]需要额外增加计算步骤, MacCormack^[14]在使用 Steger-Warming 格式时采用了这种方法; 广义拉格朗日乘子 (Generalized Lagrangian Multiplier, GLM) 方法^[20]通过增加变量 ψ 的方式, 使磁场散度误差同时被输运和耗散, Han 等^[8]在使用 AUSM 格式时采用了这种方法. 本文在使用 Steger-Warming 和 AUSM 格式时采用的是扩展型广义拉格朗日乘子 (Extended Generalized Lagrangian Multiplier, EGLM) 方法, EGLM 是 GLM 的一个变种, 其在动量和磁感应方程中添加了与 ψ 和 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 有关的源项. 文献 [21] 使用 Godunov 格式计算了强磁场等离子体中的强间断传播问题, 结果表明 EGLM 比 GLM 性能更好.

本文使用 Steger-Warming 和 AUSM 格式求解具有伽利略不变性的 EGLM-MHD 方程, 并通过两个磁流体力学算例对二者进行对比分析. 基于两种格式在求解 EGLM-MHD 方程时的通量计算方法、空间离散和时间推进, 将两种格式应用于 Orszag-Tang 涡流问题和三维爆炸波问题, 对结果进行对比分析.

1 数值算法

1.1 控制方程

求解具有伽利略不变性特征的 EGLM-MHD 方程, 即

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \left(p + \frac{1}{2} B^2 \right) \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \right] = \\ - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{u}^T + \psi \mathbf{I}) = - (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{u},$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\left(E + p + \frac{1}{2} B^2 \right) \mathbf{u} - \mathbf{B} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \right] =$$

$$-(\nabla \cdot \mathbf{B})\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot (\nabla \psi),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \nabla \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{u} \cdot (\nabla \psi) - \frac{c_h^2}{c_p^2} \psi. \quad (1)$$

式中, ρ 为密度, $\mathbf{u}$ 为速度, p 为压强, $\mathbf{B}$ 为磁感应强度, ψ 是为了保持磁场散度为零而引入的变量, $E = \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{1}{2}B^2$ 为能量, 定义 c_h 和 c_p 分别为控制 psi 对流和耗散作用的参数^[20], 计算方法如下:

$$c_h = \frac{L_{CF}}{\Delta t_n \times \max\left(\frac{1}{d}\right)},$$

$$L_{CF} = \max\left[\frac{(|u_n| + c_f)\Delta t_n}{d}\right],$$

$$c_p = \sqrt{-\Delta t_n \frac{c_h^2}{\ln(c_d)}}.$$

其中, L_{CF} 为由计算稳定性条件确定的 CFL 数, d 为网格单元大小, $c_d \in (0, 1)$ 是人为选定的参数, 本文算例中 Steger-Warming 格式取 $c_d = 0.9$, AUSM 格式取 $c_d = 0.3$.

三维 MHD 方程式 (1) 可以写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_t = \mathbf{S}. \quad (2)$$

其中, $\mathbf{S}$ 为式 (1) 四个方程右端源项组成的向量.

对式 (1) 两端在网格单元进行积分可得

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} \Omega_i + \sum_{j=1}^{n_{\text{face}}} \mathbf{F}_{tj} \cdot \mathbf{n}_{ij} |V_{ij}| = \mathbf{S}_i \Omega_i. \quad (3)$$

其中, Ω 为网格单元的体积, $|V|$ 为相邻网格单元交界面面积, i 代表第 i 个网格单元, j 代表第 i 个网格单元的第 j 个交界面, n_{face} 为第 i 个网格单元的交界面总数, $\mathbf{n}$ 为网格单元交界面的单位法向矢量.

方程右端源项 $\mathbf{S}_i$ 的离散采用有限体积法和中心格式单独计算^[20], 有

$$\nabla \psi_i = \frac{1}{\Omega_i} \sum \psi_{ik} \mathbf{n}_{ik} |V_{ik}|, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_i = \frac{1}{\Omega_i} \sum B_{nik} |V_{ik}|. \quad (5)$$

其中 ψ_{ik} 和 B_{nik} 的取值见式 (29).

为达到空间二阶精度, 这里采用 MUSCL 方法^[23] 进行重构, 并使用 minmod 限制器来抑制振

荡. 以 x 方向为例, 重构可以表达为

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^+ &= \mathbf{U}_i + \\ &\frac{1}{4}(1-k) \min\text{mod}\left(\Delta_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{U}, b\Delta_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{U}\right) + \\ &\frac{1}{4}(1+k) \min\text{mod}\left(\Delta_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{U}, b\Delta_{i-\frac{1}{2}} \mathbf{U}\right), \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^- &= \mathbf{U}_{i+1} - \\ &\frac{1}{4}(1-k) \min\text{mod}\left(\Delta_{i+\frac{3}{2}} \mathbf{U}, b\Delta_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{U}\right) - \\ &\frac{1}{4}(1+k) \min\text{mod}\left(\Delta_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{U}, b\Delta_{i+\frac{3}{2}} \mathbf{U}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

$$(7)$$

其中, $\Delta_{i+\frac{1}{2}} \mathbf{U} = \mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i$, $k = 0$, $b = 1.2$.

使用二阶 Runge-Kutta 法^[24] 作为时间推进方法. 设半离散化方程为 $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{L}_h(\mathbf{u})$, 这里

$$\mathbf{L}_h(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\Omega} \sum \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{n} |V| + \mathbf{S}.$$

二阶精度时间差商格式为

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^n), \quad (8)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^{(1)} + \mathbf{U}^n) + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{L}_h(\mathbf{U}^{(1)}). \quad (9)$$

1.2 Steger-Warming 格式

在直角坐标网格界面上求解通量时, 三维 MHD 方程式 (2) 可以写为

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

其中, 式 (2) 右端源项 $\mathbf{S}$ 的处理见式 (4) 和式 (5).

利用 Steger-Warming 格式计算通量时, 以 x 方向为例, 有

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

按照使用 EGLM 计算通量时通常采用的方法^[21], 将式 (11) 分解为两个子方程系统 A 和 B.

子方程 A 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho u^2 + p + \frac{-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv - B_x B_y) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u w - B_x B_z) &= 0, \\
\frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0, \\
\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u B_y - v B_x) &= 0, \\
\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u B_z - w B_x) &= 0, \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(E + p + \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2} \right) u - \right. \\
&\quad \left. B_x(u B_x + v B_y + w B_z) \right] = 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

子方程 B 为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial \psi}{\partial t} + c_h^2 \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

其中子方程 A 的通量采用 Steger-Warming 格式求解. 子方程 A 的守恒变量为

$$U = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_x, B_y, B_z, E]^T. \quad (14)$$

通量为

$$\begin{aligned}
F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2} \\ \rho u v - B_x B_y \\ \rho u w - B_x B_z \\ 0 \\ u B_y - v B_x \\ u B_z - w B_x \\ \left(E + p + D \right) u - B_x(u B_x + v B_y + w B_z) \end{bmatrix}. \\
D = \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2}. \quad (15)
\end{aligned}$$

MHD 方程雅克比矩阵的非齐次性导致无法直接对其进行逆风分裂, 为此 MacCormack 在不改变原方程解的前提下, 为 MHD 方程引入一个新的变量 a , 并令其恒等于 1. 在这种情况下, 新的守恒变量可以写为

$$U' = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, B_x, B_y, B_z, E, a]^T. \quad (16)$$

原通量则变为

$$\begin{aligned}
F' = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \frac{-B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2a} \\ \rho u v - \frac{B_x B_y}{a} \\ \rho u w - \frac{B_x B_z}{a} \\ 0 \\ u B_y - v B_x \\ u B_z - w B_x \\ \left(E + p + D \right) u - \frac{B_x}{a}(u B_x + v B_y + w B_z) \\ 0 \end{bmatrix}. \\
D = \frac{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}{2a}. \quad (17)
\end{aligned}$$

利用变换矩阵 $S = \partial W' / \partial U'$ 将控制方程的自变量由守恒变量变换为原始变量, 这样可使雅克比矩阵的形式更为简单, 矩阵 S 的具体形式见文献 [19].

$$W' = [\rho, u, v, w, B_x, B_y, B_z, p, a]^T. \quad (18)$$

则雅克比矩阵可表示为

$$\begin{aligned}
A = \frac{\partial W'}{\partial U'} \frac{\partial F'}{\partial U'} \frac{\partial U'}{\partial W'} = \\
\begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho a} & \frac{B_z}{\rho a} & \frac{1}{\rho} & -\frac{B^2}{2\rho a} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & -\frac{u B_x}{a} \\ 0 & B_y - B_x & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 & -\frac{v B_x}{a} \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & 0 & u & 0 & -\frac{w B_x}{a} \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u & Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)
\end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
B^2 &= B_x^2 + B_y^2 + B_z^2, \\
\beta &= \gamma - 1, \\
Q &= -B^2 / 2a^2 u \beta + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} / a^2 B_x \beta.
\end{aligned}$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 左上方的 8×8 阶子矩阵与 Powell 提出的八波模型矩阵^[19]一致, 令其为 $\mathbf{A}^1$, 矩阵 $\mathbf{A}^1$ 的特征值和特征向量与 Powell 矩阵的特征值和特征向量是完全一致的. $\mathbf{A}^1$ 经过矩阵对角化可以表示为

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}. \quad (20)$$

其中, $\mathbf{C}$ 为以 $\mathbf{A}^1$ 各特征值的左特征向量为行向量的矩阵, $\mathbf{C}^{-1}$ 为以 $\mathbf{A}^1$ 各特征值的右特征向量为列向量的矩阵, 具体形式见文献^[19]. $\mathbf{A}$ 为对角矩阵, 其对角元素为 $\mathbf{A}^1$ 的各特征值, 具体形式为

$$\mathbf{A} = \text{diag}(u, u + v_A, u - v_A, u + c_f, u - c_f, u + c_s, u - c_s, u). \quad (21)$$

其中, v_A 为阿尔芬速度, c_f 和 c_s 分别为快磁声波速度和慢磁声波速度.

根据逆风通量的向量分裂思想, 计算域中相邻的第 i 单元和第 k 单元某交界面的通量可表示为

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}'_i + \mathbf{F}'_k. \quad (22)$$

MacCormack 与其后的研究对于特征值矩阵 $\mathbf{A}$ 均采用的是 Steger-Warming 分裂方法, 即令特征值 λ_i 分裂为 $\lambda_i^\pm = (\lambda_i \pm |\lambda_i|)/2$. 这种分裂的优点是计算简单, 缺点是计算过程中会产生振荡, 甚至当速度值与特征速度非常接近时, 振荡会导致计算失败. 熵修正方法可以弥补这一缺点, 但其会引入了额外的人工黏性, 从而导致计算精度降低. 针对这一问题, 这里采用了 Pan 等^[15] 对 Steger-Warming 格式的改进方法, 即基于马赫数的分裂方法, 马赫数 $m = u/c_f$, 具体形式为

$$\mathbf{A}^\pm = \begin{bmatrix} u^\pm \\ (u + v_A)^\pm \\ (u - v_A)^\pm \\ (u + c_f)^\pm \\ (u - c_f)^\pm \\ (u + c_s)^\pm \\ (u - c_s)^\pm \\ u^\pm \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m \pm 1}{2} c_f \\ \frac{m \pm 1}{2} c_f + \frac{1 \pm m}{2} v_A \\ \frac{m \pm 1}{2} c_f - \frac{1 \pm m}{2} v_A \\ \frac{m \pm 1}{2} c_f + \frac{1 \pm m}{2} c_f \\ \frac{m \pm 1}{2} c_f - \frac{1 \pm m}{2} c_f \\ \frac{m \pm 1}{2} c_f + \frac{1 \pm m}{2} c_s \\ \frac{m \pm 1}{2} c_f - \frac{1 \pm m}{2} c_s \\ \frac{m \pm 1}{2} c_f \end{bmatrix}. \quad (23)$$

通量 $\mathbf{F}'_i$ 和 $\mathbf{F}'_k$ 可表示为

$$\mathbf{F}'_i = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{S} & \mathbf{b}_1 \\ [\mathbf{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_i \mathbf{U}', \quad (24)$$

$$\mathbf{F}'_k = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^- \mathbf{C} \mathbf{S} & \mathbf{b}_1 \\ [\mathbf{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_k \mathbf{U}'. \quad (25)$$

其中, $\mathbf{b}_1$ 为由矩阵 $\mathbf{A}$ 最后一列前 8 个元素组成的列向量, $\mathbf{S}$ 为将控制方程自变量由守恒变量变换为原始变量的变换矩阵, $\mathbf{S}^{-1}$ 为其逆矩阵, 具体形式可参考文献^[19].

直角坐标系计算域中相邻的第 i 单元与第 k 单元交界面上的对流通量为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'_A = \mathbf{F}'_i + \mathbf{F}'_k = & \left(\begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{S} & \mathbf{b}_1 \\ [\mathbf{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^- \mathbf{C} \mathbf{S} & \mathbf{b}_1 \\ [\mathbf{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_k \right) \mathbf{U}' = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{U} & \mathbf{b}^+ \\ [\mathbf{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^- \mathbf{C} \mathbf{S} \mathbf{U} & \mathbf{b}^- \\ [\mathbf{0}]^T & 0 \end{bmatrix}_k. \end{aligned} \quad (26)$$

式中,

$$\mathbf{b} = \left[0, n_x \frac{B^2(\beta - 1)}{2a^2}, n_y \frac{B^2(\beta - 1)}{2a^2}, n_z \frac{B^2(\beta - 1)}{2a^2}, -u \frac{B_x}{a}, -v \frac{B_x}{a}, -w \frac{B_x}{a}, u \frac{B^2(\beta - 1)}{2a^2} \right]^T. \quad (27)$$

其中 $\beta = \gamma - 1$.

对交界面 ik 上的 $\mathbf{b}$ 采用两侧直接取平均的方法, 即令 $\mathbf{b}^+ = \mathbf{b}^- = \mathbf{b}/2$, 去掉式 (27) 中最后一个表征 a 为常数的方程, 即可得到最终的对流通量

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A = & (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{S})_i \mathbf{U}_i + \\ & (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^+ \mathbf{C} \mathbf{S})_k \mathbf{U}_k + \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i + \mathbf{b}_k). \end{aligned} \quad (28)$$

至此, 子方程 A 的通量求解完成.

子方程 B 的通量可由该子方程在界面上的黎曼问题解析解求出. 通过求解子方程 B, 可以得到 ψ_{ik}

和 B_{xik} 取值为

$$\begin{bmatrix} B_{xik} \\ \psi_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xi} \\ \psi_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(B_{xk} - B_{xi}) - \frac{1}{2c_h}(\psi_k - \psi_i) \\ \frac{1}{2}(\psi_k - \psi_i) - \frac{c_h}{2}(B_{xk} - B_{xi}) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

则在子方程 A 基础上的附加通量为

$$\mathbf{F}_B = [0, 0, 0, 0, n_x \psi_{ik}, n_y \psi_{ik}, n_z \psi_{ik}, 0, c_h^2 B_{xik}]^T. \quad (30)$$

因此, 实际计算过程中, 计算域中相邻的第 i 单元与第 k 单元交界面上所求解的对流通量为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B. \quad (31)$$

1.3 AUSM 格式

AUSM 格式将对流项中的速度与压力分开处理, 通过定义一个适当交界面上的速度来对对流项进行分裂处理. 利用 AUSM 格式计算具有伽利略不变性的 EGLM-MHD 方程相邻控制体单元交界面处的对流通量为 [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & c_f(M_i^+ \phi_i + M_k^- \phi_k) + \\ & (P_i^+ \mathbf{P}_i + P_k^- \mathbf{P}_k) + \frac{1}{2}(\phi_{B,i} + \phi_{B,k}). \end{aligned} \quad (32)$$

式中,

$$\phi = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_x \\ \rho u_y \\ \rho u_z \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ \rho e + p_G \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ n_x p_G \\ n_y p_G \\ n_z p_G \\ -\bar{B}_f u_x \\ -\bar{B}_f u_y \\ -\bar{B}_f u_z \\ -\bar{B}_f (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_x \bar{B}_f \\ -B_y \bar{B}_f \\ -B_z \bar{B}_f \\ n_x \psi \\ n_y \psi \\ n_z \psi \\ 0 \\ c_h^2 B_f \end{bmatrix}. \quad (33)$$

其中, 下标 i 和 k 分别表示来自交界面左右两侧单元的贡献, $B_f = n_x B_x + n_y B_y + n_z B_z$, 这里 n_x, n_y, n_z 为交界面法向矢量的三个分量, $\bar{B}_f = (B_{f,i} + B_{f,k})/2$, 总压 $p_G = p + \frac{B^2}{2}$, $M^\pm$ 和 $p^\pm$ 为马赫数插值函数, 有

$$\begin{aligned} M^\pm &= \begin{cases} \pm \frac{1}{4}(M \pm 1)^2, & |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2}(M \pm |M|), & |M| > 1; \end{cases} \\ P^\pm &= \begin{cases} \frac{1}{4}(M \pm 1)^2(2 \mp M), & |M| \leq 1, \\ \frac{1}{2}[1 \pm \text{sign}(M)], & |M| > 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

其中,

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (35)$$

选取快磁声波速度定义马赫数, 并将其作为计算式 (34) 的马赫数, 即

$$M_{i,k} = \frac{u_{i,k}}{c_f}. \quad (36)$$

其中 $u_{i,k}$ 表示交界面左右两侧单元的声速, 快磁声波速度

$$c_f = \min(c_{f,i}, c_{f,k}). \quad (37)$$

2 数值算例

2.1 Orszag-Tang 涡流

由于 Orszag-Tang 涡流在其形成时存在多种激波的相互作用, 因此经常被用作验证磁流体力学算法有效性的标准算例. 本文计算区域为 $(x, y) \in [0, 2\pi]^2$, 采用文献 [25] 的初边值条件. 初值为

$$\rho(x, y, 0) = \gamma^2, \quad p(x, y, 0) = \gamma,$$

$$u(x, y, 0) = -\sin y, \quad v(x, y, 0) = \sin x,$$

$$B_x(x, y, 0) = -\sin y, \quad B_y(x, y, 0) = \sin 2x.$$

其中 $\gamma = 5/3$, 使用周期性边界条件, 网格数为 200×200 .

从图 1~4 可以清晰看出, Steger-Warming 格式

和 AUSM 格式均能计算出 Orszag-Tang 涡流的基本结构, 二者计算结果相似, 且与已有研究结果基本相同 [26-28]. 从图 5 两种格式得到的 $y = 0.625\pi$ 线上的压力分布可以看出, Steger-Warming 和 AUSM 格式的计算结果均与文献 [28] 中 $y = 0.625\pi$ 线上的压力分布较为吻合. 为定量观察 EGLM 对磁场散度误

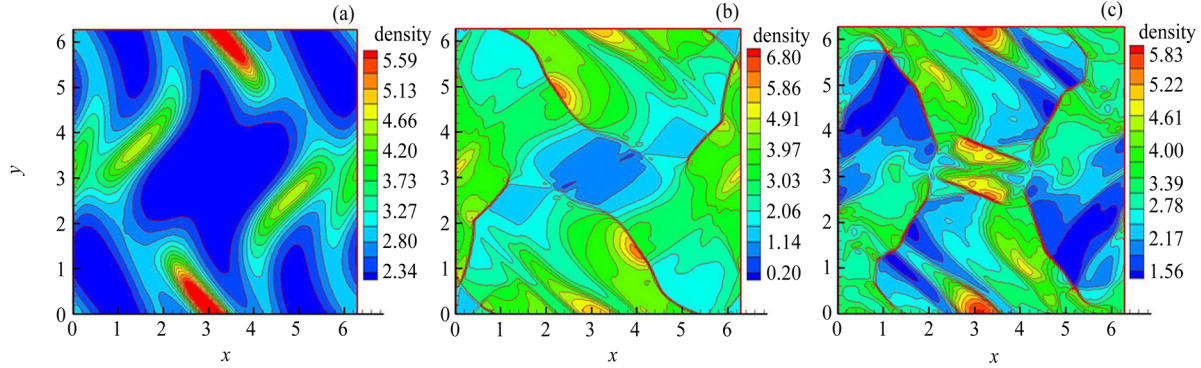


图 1 Steger-Warming 格式得到的 Orszag-Tang 涡流密度分布. (a) $t = 0.5$, (b) $t = 2$, (c) $t = 3$

Fig. 1 Density contours of Orszag-Tang vortex with Steger-Warming scheme. (a) $t = 0.5$, (b) $t = 2$, (c) $t = 3$

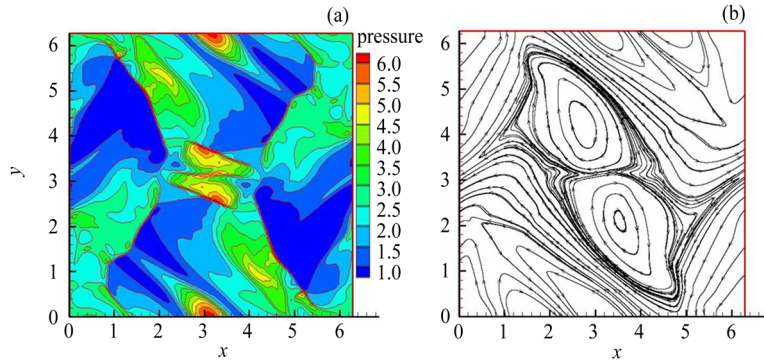


图 2 Steger-Warming 格式得到的 $t = 3$ 时刻 Orszag-Tang 涡流压力 (a) 和磁力线 (b) 分布

Fig. 2 Pressure (a) and magnetic field (b) of Orszag-Tang vortex with Steger-Warming scheme at $t = 3$

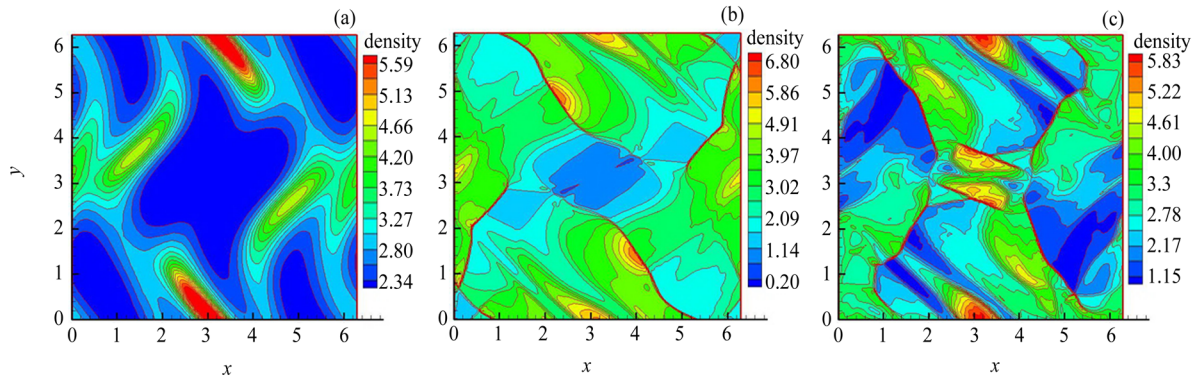
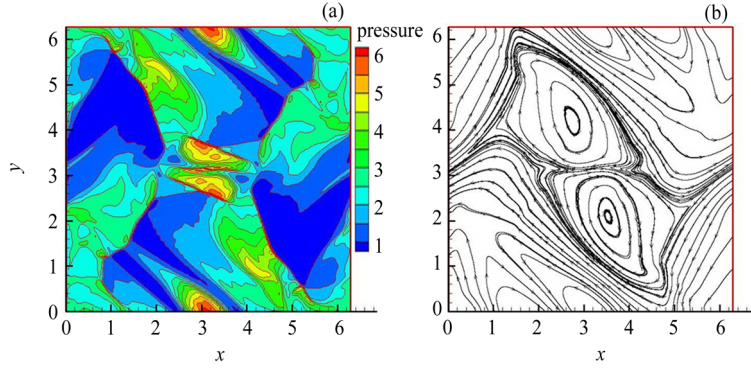
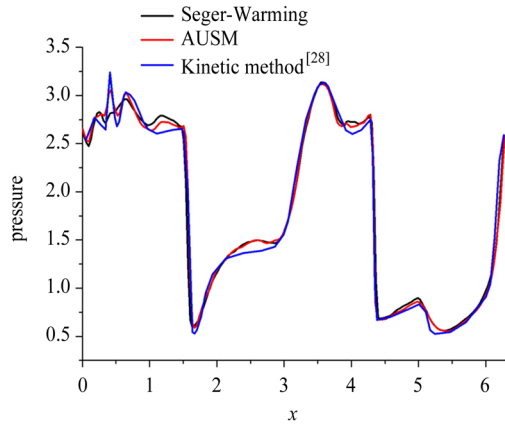
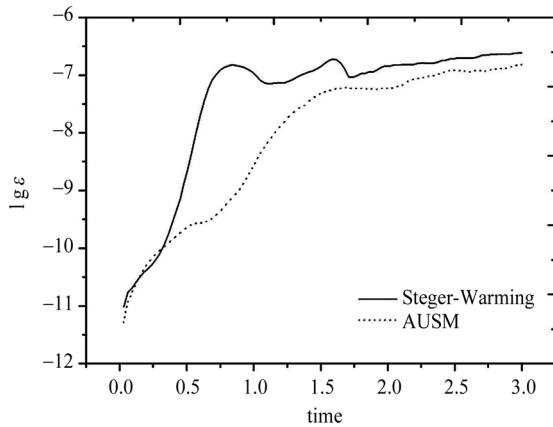


图 3 AUSM 格式得到的 Orszag-Tang 涡流密度分布. (a) $t = 0.5$, (b) $t = 2$, (c) $t = 3$

Fig. 3 Density contours of Orszag-Tang vortex problem with AUSM scheme. (a) $t = 0.5$, (b) $t = 2$, (c) $t = 3$

图4 AUSM 格式得到的 $t = 3$ 时刻 Orszag-Tang 涡流压力 (a) 和磁力线 (b) 分布Fig. 4 Pressure (a) and magnetic field (b) of Orszag-Tang vortex with AUSM scheme at $t = 3$ 图5 Orszag-Tang 涡流 $t = 3$ 时刻在线 $y = 0.625\pi$ 上的压力分布Fig. 5 Pressure distribution along the line $y = 0.625\pi$ for the Orszag-Tang vortex at $t = 3$ 图6 Orszag-Tang 涡流磁场散度误差 ε 随时间的变化Fig. 6 Evolutions of magnetic field divergence error ε for the Orszag-Tang vortex

差的控制效果, 这里参考文献 [19] 计算平均磁场散度的相对误差, 即

$$\varepsilon(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^N \frac{\int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{B} d\Omega}{\int_{|V|_i} |\mathbf{B}| d|V|} / N. \quad (38)$$

式中 N 为总网格数. 图 6 给出了平均磁场散度相对误差随时间的变化. 从图 6 中可以看出, 随着计算的进行, 两种格式计算结果中的平均磁场散度误差逐渐趋于稳定, 保持在 10^{-6} 以下, Steger-Warming 格式计算结果的散度误差略高于 AUSM 格式. 这说明在本算例中 EGLM 方法有效控制了磁场散度误差. 本算例的程序使用 Intel Fortran 编译器, 以 O2 优化选项进行编译, 在配备 Intel Xeon E7450 CPU (主频 2.4 GHz) 的计算机上运行. AUSM 格式在 200×200 网格下计算到 $t = 3$ 物理时刻需要 9 min, 而 Steger-Warming 格式在相同条件下计算到 $t = 3$ 物理时刻需要 86 min. AUSM 格式的计算速度较快. 这可能是因为 Steger-Warming 格式较为繁琐, 包含较多矩阵运算, 而 AUSM 格式计算步骤相对简单.

2.2 三维爆炸波

类似于气体爆炸波, 在强磁场等离子体中心的过压区会产生磁流体爆炸波. 爆炸会驱动向外的快速磁激波压缩其前面的等离子体和磁场, 激波内部则产生稀疏的等离子体. 本文初边值条件与文献 [22] 相同. 计算区域为 $[-0.5, 0.5]^3$, 初始条件为:

$$\rho = 1; \quad p = \begin{cases} 10, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 0.1, \\ 0.1, & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0.1; \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{B} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

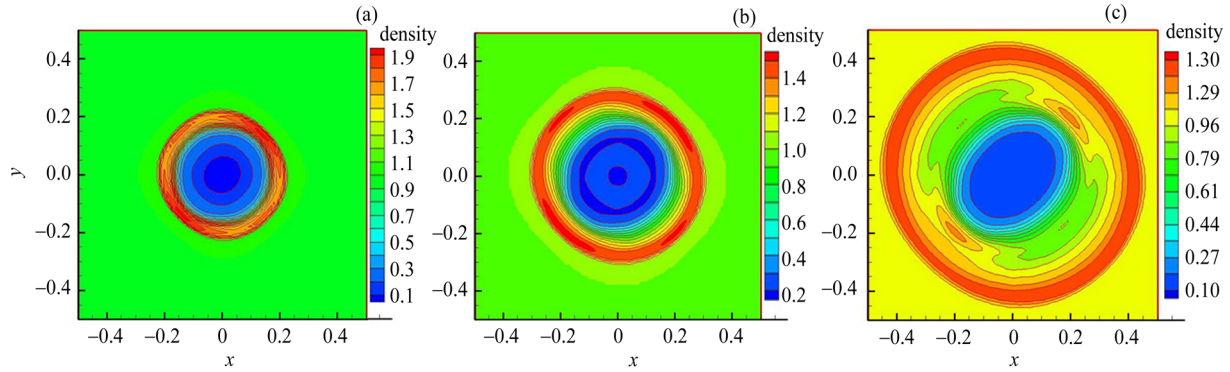


图 7 Steger-Warming 格式得到的三维爆炸波在 $z = 0$ 平面的密度分布. (a) $t = 0.05$, (b) $t = 0.1$, (c) $t = 0.2$

Fig. 7 Density contours of three-dimensional blastwave problem on the plane of $z = 0$ with Steger-Warming scheme.

(a) $t = 0.05$, (b) $t = 0.1$, (c) $t = 0.2$

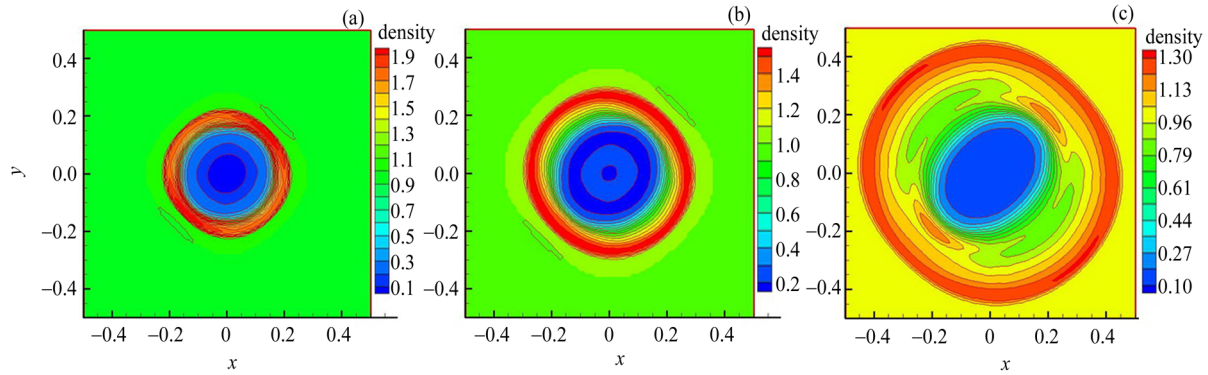


图 8 AUSM 格式得到的三维爆炸波在 $z = 0$ 平面上的密度分布. (a) $t = 0.05$, (b) $t = 0.1$, (c) $t = 0.2$

Fig. 8 Density contours of three-dimensional blastwave on the plane of $z = 0$ with AUSM scheme.

(a) $t = 0.05$, (b) $t = 0.1$, (c) $t = 0.2$

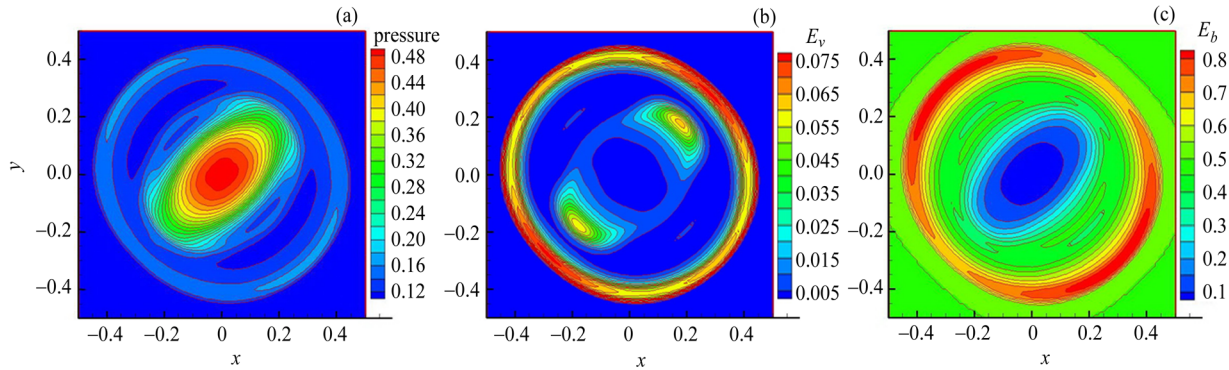


图 9 Steger-Warming 格式得到的三维爆炸波 $t = 0.2$ 时刻在 $z = 0$ 平面上的压力 (a)、动能 (b) 和磁能 (c) 分布

Fig. 9 Pressure (a), kinetic energy (b) and magnetic energy (c) contours of three-dimensional blastwave on the plane of $z = 0$ with Steger-Warming scheme at $t = 0.2$

其中, $\gamma = 5/3$, 边界条件使用自由输入/输出边界条件, 网格数为 $100 \times 100 \times 100$.

如图 7 和图 8 所示, 随着计算的进行, 计算区域

中心较高的压强驱动爆轰波向周围扩散。从图 9 和图 10 可以看到, 最外层的激波面是一个快激波, 内部是两个气体壳, 平行于磁场传播, 包围其的分别是

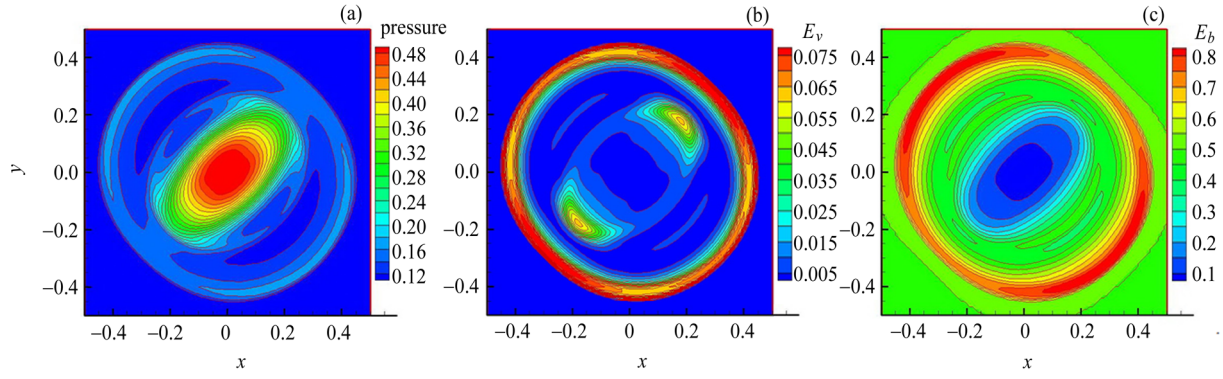


图 10 AUSM 格式得到的三维爆炸波 $t = 0.2$ 时刻在 $z = 0$ 平面上的压力 (a)、动能 (b) 和磁能 (c) 分布

Fig. 10 Pressure (a), kinetic energy (b) and magnetic energy (c) contours of three-dimensional blastwave on the plane of $z = 0$ with AUSM scheme at $t = 0.2$

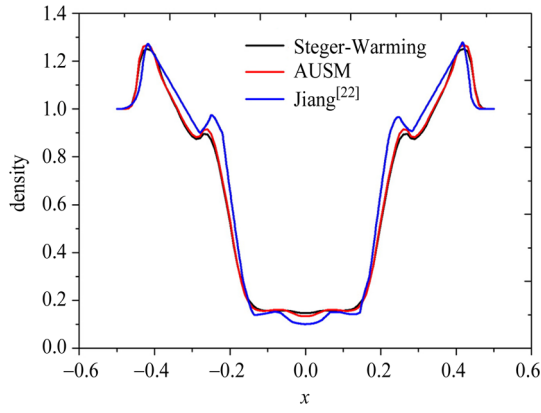


图 11 三维爆炸波 $t = 0.2$ 时的爆炸中心线密度分布

Fig. 11 Density distribution along the central line for the three-dimensional blastwave at $t = 0.2$

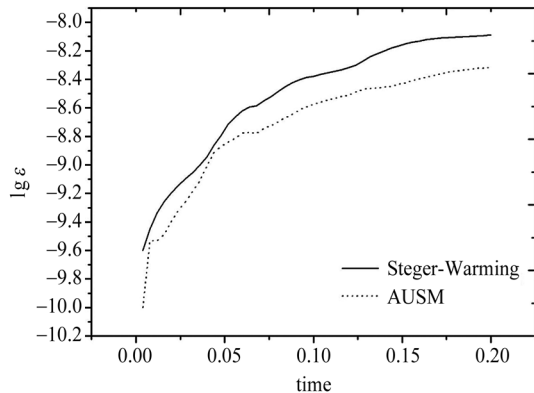


图 12 三维爆炸波磁场散度误差 ε 随时间的变化

Fig. 12 Evolutions of magnetic field divergence error ε for the three-dimensional blastwave

一个外层慢激波和内层接触间断面, 两种格式计算结果的总体结构与文献 [22] 基本一致. 从图 11 可以看到计算结果保持了高度的对称性, 与文献 [22] 的结果差别不大.

图 12 给出了利用式 (38) 计算的平均磁场散度误差随时间的变化, 从图 8 可以看出磁场散度相对误差被控制在 10^{-8} 以下, Steger-Warming 格式计算结果的散度误差略高于 AUSM 格式. 在与 2.1 节算例相同的运行环境下, AUSM 格式在 $100 \times 100 \times 100$ 网格下计算到 $t = 0.2$ 物理时刻需要运行 11 min, 而 Steger-Warming 格式在相同条件下计算到 $t = 0.2$ 物理时刻需要运行 105 min, AUSM 格式的计算速度快于 Steger-Warming 格式.

3 结论

通过采用 Steger-Warming 格式和 AUSM 格式求解具有伽利略不变性的 EGLM-MHD 方程, 对 Orszag-Tang 涡流和三维爆炸波问题进行数值模拟, 并对二者计算结果进行分析. 结果表明: 两种格式均能得到稳定精确的数值结果; Steger-Warming 格式在计算过程中产生的磁场散度误差略高于 AUSM 格式; 在对相同物理问题进行模拟计算时, AUSM 格式所需运行时间比 Steger-Warming 格式要少, 这可能是由于 Steger-Warming 格式计算较为繁琐, 而 AUSM 格式计算步骤简单所造成的.

参考文献

- [1] ANNETTE P, DOUGLAS B, DUSAN O, *et al.* Wang-Sheeley-Arge-Enlil cone model transitions to operations [J]. *Space Weather*, 2011, **9**(3): 420-424
- [2] RILEY P, LIONELLO R, LINKER J A, *et al.* Global MHD modeling of the solar corona and inner heliosphere for the whole heliosphere interval [J]. *Solar Phys.*, 2011, **274**(1/2): 361-377
- [3] YANG Liping, FENG Xueshang, XIANG Changqing, *et al.* Time-dependent MHD modeling of the global solar corona for year 2007: driven by daily-updated magnetic field synoptic data [J]. *J. Geophys. Res.*, 2012, **117**(A8): 101-110
- [4] FENG X A, ZHOU Y F, WU S T. A novel numerical implementation for solar wind modeling by the modified conservation element/solution element method [J]. *Astrophys. J.*, 2007, **655**(2): 1110-1126
- [5] FORBES T G, LINKER J A, CHEN J, *et al.* CME theory and models [J]. *Space Sci. Rev.*, 2006, **123**(1/2/3): 251-302
- [6] LYON J G, FEDDER J A, MOBARRY C M. The Lyon-Fedder-Mobarry (LFM) global MHD magnetospheric simulation code [J]. *J. Atmos. Solar-Terr. Phys.*, 2004, **66**(15/16): 1333-1350
- [7] FENG Xueshang, XIANG Changqing, ZHONG Dingkun. Numerical study of interplanetary solar storms [J]. *Sci. Sin. Terr.*, 2013, **43**(6): 912-933 (冯学尚, 向长青, 钟鼎坤. 行星际太阳风暴的数值模拟研究 [J]. 中国科学: 地球科学, 2013, **43**(6): 912-933)
- [8] HAN S H, LEE J I, KIM K H. Accurate and robust pressure weight advection upstream splitting method for magnetohydrodynamics equations [J]. *AIAA J.*, 2009, **47**(4): 970-981
- [9] BRIO M, WU C C. An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 1988, **75**(2): 400-422
- [10] JANHUNEN P. A positive conservative method for magnetohydrodynamics Based HLL and Roe methods [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **160**(2): 649-661
- [11] STEGER J L, WARMING R F. Flux vector splitting of the inviscid gas dynamic equation with application to finite-difference methods [J]. *J. Comput. Phys.*, 1981, **40**(2): 263-293
- [12] LIN S J, CHAO W C, SUD Y C, *et al.* A class of the Van Leer-type transport schemes and its application to the moisture transport in a general circulation model [J]. *Monthly Weather Rev.*, 1994, **122**(7): 1575-1593
- [13] LIOU M S, STEFFEN C J. A new flux splitting scheme [J]. *J. Comput. Phys.*, 1993, **107**(1): 23-39
- [14] MACCORMACK R W. Numerical computation in magnetofluid dynamics [C]//Computational fluid dynamics for the 21st century. Berlin: Springer, 2001: 369-384
- [15] PAN Yong, WANG Jiangfeng, WU Yizhao. A new Jacobian matrix splitting method for MHD equations upwind scheme [J]. *Acta Aerodyn. Sin.*, 2008, **26**(2): 249-256 (潘勇, 王江峰, 伍贻兆. 一种新的用于 MHD 方程迎风格式的 Jacobian 矩阵分裂方法 [J]. 空气动力学学报, 2008, **26**(2): 249-256)
- [16] TÓTH G. The $\nabla \cdot B = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **161**(2): 605-652
- [17] BRACKBILL J U, BARNES D C. The effect of nonzero $\nabla \cdot B$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 1980, **35**(3): 426-430
- [18] EVANS C R, HAWLEY J F. Simulation of magnetohydrodynamic flows—A constrained transport method [J]. *Astrophys. J.*, 1988, **332**(2): 659-677
- [19] POWELL K G, ROE P L, LINDE T J, *et al.* A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 1999, **154**(2): 284-309
- [20] DEDNER A, KEMM F, KRONER D, *et al.* Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2002, **175**(2): 645-673
- [21] MIGNONE A, TZEFERACOS P. A second-order unsplit Godunov scheme for cell-centered MHD: the CTU-GLM scheme [J]. *J. Comput. Phys.*, 2010, **229**(6): 2117-2138
- [22] JIANG Chaowei, FENG Xueshang, ZHANG Jian. AMR Simulations of magnetohydrodynamic problems by the CESE method in curvilinear coordinates [J]. *Solar Phys.*, 2010, **267**(2): 463-491
- [23] ZHANG Deliang. A Course in Computational Fluid Dynamics [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011 (张德良. 计算流体力学导论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2011)
- [24] DONTCHEV A L, HAGER W W, VELIOV V M. Second-order Runge-Kutta approximations in control constrained optical control [J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2000, **38**(1): 202-226
- [25] ZHANG M, YU S J, LIN S, *et al.* Solving the MHD equations by the space-time Conserving Element and Solution Element method [J]. *J. Comput. Phys.*, 2006, **214**(2): 599-617
- [26] FENG Xueshang, ZHOU Yufen, HU Yanqi. A 3rd order WENO GLM-MHD scheme for magnetic reconnection [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2006, **26**(1): 1-7
- [27] ZACHARY A L, MALAGOLI A, COLELLA P. A higher-order Godunov method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 1994, **15**(2): 263-284
- [28] TANG Huazhong, XU Kun. A high-order gas-kinetic method for multidimensional ideal magnetohydrodynamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **165**(1): 69-88