

Liu Yuanxin, Ji Zhen, Feng Xueshang, Zhou Yufen. CESE method for resistive magnetohydrodynamics. *Chin. J. Space Sci.*, 2010, **30**(3): 211-220

电阻磁流体力学模拟的 CESE 方法^{*}

刘元昕^{1,2} 纪珍¹ 冯学尚¹ 周玉芬¹

¹(中国科学院空间科学与应用研究中心 空间天气学国家重点实验室 北京 100190)

²(中国科学院研究生院)

摘要 利用时空守恒元解元方法 (CESE) 和两种改进方法, 即库朗数不敏感 (CNIS) 方法与高阶 CESE 方法求解 2.5 维电阻磁流体力学 (resistive MHD) 方程组, 模拟了两个单电流片重联问题。并考察了上述三种方法所得结果的磁场散度。分析表明, 三种方法所得到的磁场位形基本没有差别, 但在磁场散度上存在一定差异, 相比另外两种方法, CNIS 方法在控制磁场散度方面表现得更好。

关键词 电阻 MHD; CESE 方法; 磁场重联

中图法分类号 P 353

CESE Method for Resistive Magnetohydrodynamics

LIU Yuanxin^{1,2} Ji Zhen¹ FENG Xueshang¹ ZHOU Yufen¹

¹(State Key Laboratory for Space Weather, Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

²(Graduate University of Chinese Academy of Sciences)

Abstract In this paper, the 2.5-dimensional resistive Magnetohydrodynamics (MHD) equations were solved to simulate two magnetic reconnection problems in single current sheet by applying the space-time Conservation Element and Solution Element (CESE) method. Three different versions of CESE method are employed: (1) the original CESE method, (2) the Courant Number Insensitive Scheme (CNIS) CESE method, (3) the high order CESE method. The numerical results obtained from the above-mentioned approaches are discussed in the aspect of the divergence of the magnetic field. The numerical results indicate that no obvious differences exist among the three approaches in the configuration of the magnetic field. However, for the divergence of the magnetic field, the results obtained from the three approaches differ from each other. In respect to keeping the divergence of the magnetic field small, the CNIS method is better than the others. It is hoped that these conclusions might be helpful for the design of algorithm where the magnetic reconnection problems should be included, since the controlling of the divergence of the magnetic field is one of the key issues in MHD

* 国家自然科学基金项目 (40874077) 和国家重点实验室专项基金共同资助

2009-04-30 收到原稿, 2010-01-13 收到修定稿

E-mail: yxliu@spaceweather.ac.cn

simulation.

Key words Resistive MHD, CESE method, Magnetic reconnection

1 引言

时空守恒元解元方法 (CESE) 是一种有别于常见数值格式的方法, 它最早由 Chang 在 1995 年提出^[1]. 与常见数值格式相比, CESE 方法的特点主要有: 第一, 在计算通量时, 将时间和空间统一起来同等对待; 第二, 在求解出流场变量的同时, 也求解了各流场变量的一阶空间导数, 在相同的网格数下, 计算精度更高; 第三, 可以较好地捕捉强间断, 分辨率很高; 第四, 推广到多维时, 不需要传统的算子分裂或方向交替技术; 第五, 不需采取特殊的特征分析方法, 如黎曼分解; 第六, 可以通过改变可调参数来调节格式的数值粘性^[2-5].

多年来, CESE 方法在理论上不断发展, 例如为解决当 CFL (Courant-Friedrich-Levy) 数小于 0.1 时出现数值耗散过大的问题, 提出了 CNIS 方法 (库朗数不敏感方法) 与高阶 CESE 方法, 此方法得到了较为广泛的应用^[6-10]. Yee 和 Zhang 等首先将 CESE 方法应用到磁流体力学 (MHD) 当中, 并且发现, 与常见格式相比, CESE 方法不使用额外的磁场散度处理方法, 也可以保持很小的磁场散度^[11-12]. 解析情况下, 磁流体中的磁场散度应处处为 0, 但在数值模拟中, 这一约束条件无法严格满足, 而如不能将磁场散度保持在较小范围内, 就会造成非物理流动, 无法得到正确的计算结果. 因此, 如何控制磁场散度是 MHD 模拟中的关键问题之一^[13-14].

磁场重联提供了一种磁能转化的有效机制, 可以引起空间等离子体磁场拓扑位形的变化. 卫星观测显示, 磁场重联在许多空间爆发现象中都起着重要作用, 如耀斑、日冕物质抛射、磁层亚暴等. 对于磁场重联, 人们使用过多种数值格式对其进行数值模拟, 如 Lax-Wendroff^[15]、龙格 - 库塔法^[16]、WENO^[17]等. 这些重联问题通常都需要使用额外的磁场散度处理方法以保持磁场散度较小, 使计算能够顺利进行. Feng^[18] 等首次使用 CESE 方法模拟了单电流片和多电流片的磁场重联问题, 其并未使用额外的磁场散度处理方法, 磁场散度保持在了较小范围内. 鉴于控制磁场散度对 MHD 模拟的重要性, 本文在文献 [18] 的基础上, 使用 CESE 方法对两个单电流片重联问

题进行了模拟, 并使用 CNIS 与高阶 CESE 两种方法对原有格式进行改进, 以考察不同数值方法对磁场散度的影响, 探索控制磁场散度的新途径.

2 控制方程

描述 2 维磁场重联的 2.5 维可压缩电阻磁流体力学 (resistive MHD) 方程组的无量纲形式如下:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial y} = \mathbf{Q}. \quad (1)$$

其中,

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, p, B_x, B_y, B_z)^T =$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8)^T,$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \frac{p}{2} - \frac{\rho u^2 - B_x^2 - B_y^2 - B_z^2}{2} \\ \rho u v - B_x B_y \\ \rho u w - B_x B_z \\ \gamma \rho u \\ 0 \\ u B_y - v B_x \\ u B_z - w B_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho u v - B_x B_y \\ \rho v^2 + \frac{p}{2} - \frac{\rho v^2 - B_y^2 - B_x^2 - B_z^2}{2} \\ \rho u w - B_y B_z \\ \gamma \rho v \\ v B_x - u B_y \\ 0 \\ v B_z - w B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_v = \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, \eta^* \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right), \eta^* \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \right]^T =$$

$$[f_{v1}, f_{v2}, f_{v3}, f_{v4}, f_{v5}, f_{v6}, f_{v7}, f_{v8}]^T,$$

$$\mathbf{G}_v = \left[0, 0, 0, 0, 0, \eta^* \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right), 0, \eta^* \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \right]^T =$$

$$[g_{v1}, g_{v2}, g_{v3}, g_{v4}, g_{v5}, g_{v6}, g_{v7}, g_{v8}]^T,$$

$$Q = \left\{ 0, 0, 0, 0, (\gamma - 1) \left\{ \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \eta^* \left[\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, 0, 0, 0 \right\}^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_8]^T.$$

这里的长度、密度、磁场、速度、时间和压强分别用无量纲参数 $L_0, \rho_0, B_0, v_{A0}, \tau_A, B_0^2/(2\mu_0)$ 归一化处理. 其中 $L_0, \rho_0, B_0, v_{A0} = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$, $\tau_A = L_0/v_{A0}$ 分别表示电流片半宽、初始等离子体密度、初始磁场强度、阿尔芬波速和阿尔芬时间. 等离子体 $\beta = (2\mu_0\rho_0)/B_0^2$, 电阻率用 $\mu_0 L_0 v_{A0}$ 归一化处理, 其中 μ_0 为磁导率, $\gamma = 5/3$ 为比热比.

3 时空守恒元解元 (CESE) 格式

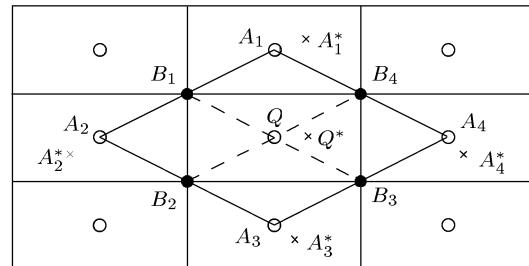
令 $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = t$ 为三维欧几里得空间 E_3 的三个坐标, 根据高斯定理, 则式 (1) 可化为

$$\oint_{S(V)} \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} = \oint_V Q dV. \quad (2)$$

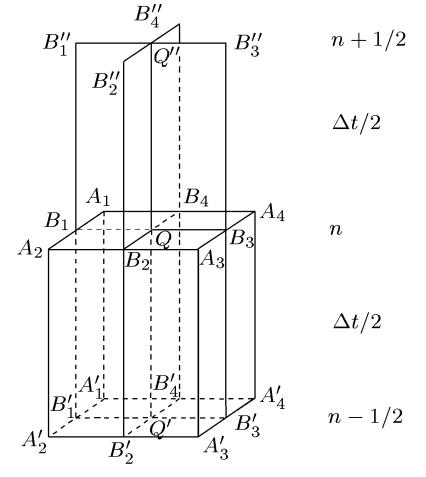
其中, $\mathbf{h} = (\mathbf{F} - \mathbf{F}_v, \mathbf{G} - \mathbf{G}_v, \mathbf{U})$ 为时空电流密度矢量, $S(V)$ 为 E_3 中任意时空区域 V 的边界.

本文采取的是与文献 [18] 相同的守恒元解元划分方法. 如图 1(a) 所示, Q 为四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的重心; A_1, A_2, A_3, A_4 分别为四边形 $B_1B_2B_3B_4$ 的四个相邻四边形的重心; Q^* 为八边形 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4$ 的重心. 在这种 CESE 格式当中, Q^* 点为 Q 点的解点, 同样地, $A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*$ 分别为 A_1, A_2, A_3, A_4 的解点. 显然, 当网格为均匀网格时, Q^* 与 Q 重合. 如图 1(b) 所示, $Q, A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ 位于 t^n 时刻, $Q', A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ 位于 $t^{n-1/2}$ 时刻, $Q'', A_1'', A_2'', A_3'', A_4'', B_1'', B_2'', B_3'', B_4''$ 位于 $t^{n+1/2}$ 时刻. 解元 $SE(Q)$ 定义为柱体 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4$ 内部, 平面 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4$ 以及四个侧平面 $Q'Q''B_1'B_1, Q'Q''B_2'B_2, Q'Q''B_3'B_3, Q'Q''B_4'B_4$. 守恒元 $CE(Q)$ 定义为柱体 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4$.

在每个守恒元上, 时空通量守恒, 因此式 (2) 可以在守恒元上积分. 物理量在每个解元内连续 (相邻解元之间, 物理量可以不连续, 这是 CESE 方法可以较好捕捉强间断的原因), 并可用泰勒级数展开. 所



(a)



(b)

图 1 CESE 格式的 xy 平面几何结构 (a) 及
守恒元与解元 (b)

Fig. 1 Space geometry in an xy plane of
CESE method (a), and the definitions of Conservation
Elements and Solution Elements (b) in CESE method

有物理量及其导数都在解点上求解和存储.

对于每个解点 Q^* 以及任意的

$$(x, y, t) \in SE(Q^*), u_m(x, y, t), f_m(x, y, t), \\ g_m(x, y, t), f_{vm}(x, y, t), g_{vm}(x, y, t), Q_m(x, y, t)$$

可以用相应的离散量

$$u_m^*(x, y, t; Q^*), f_m^*(x, y, t; Q^*), g_m^*(x, y, t; Q^*), \\ f_{vm}^*(x, y, t; Q^*), g_{vm}^*(x, y, t; Q^*), Q_m^*(x, y, t; Q^*)$$

近似替代. 在原始 CESE 方法中, 利用如下一阶泰勒展开:

$$u_m^*(x, y, t; Q^*) = \\ (u_m)_{Q^*} + (u_{mx})_{Q^*}(x - x_{Q^*}) + \\ (u_{my})_{Q^*}(y - y_{Q^*}) + (u_{mt})_{Q^*}(t - t^n), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f_m^*(x, y, t; Q^*) &= \\ (f_m)_{Q^*} + (f_{mx})_{Q^*}(x - x_{Q^*}) + \\ (f_{my})_{Q^*}(y - y_{Q^*}) + (f_{mt})_{Q^*}(t - t^n), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} g_m^*(x, y, t; Q^*) &= \\ (g_m)_{Q^*} + (g_{mx})_{Q^*}(x - x_{Q^*}) + \\ (g_{my})_{Q^*}(y - y_{Q^*}) + (g_{mt})_{Q^*}(t - t^n), \end{aligned} \quad (5)$$

$$f_{vm}^*(x, y, t; Q^*) = (f_{vm})_{Q^*}, \quad (6)$$

$$g_{vm}^*(x, y, t; Q^*) = (g_{vm})_{Q^*}, \quad (7)$$

$$Q_m^*(x, y, t; Q^*) = (Q_m)_{Q^*}. \quad (8)$$

其中, $m = 1, 2, \dots, 8$; x_{Q^*}, y_{Q^*}, t^n 为 Q^* 点坐标; $(u_m)_{Q^*}, (u_{mx})_{Q^*}, (u_{my})_{Q^*}$ 分别为 $u_m, \frac{\partial u_m}{\partial x}, \frac{\partial u_m}{\partial y}$ 在 Q^* 点的值, 此时, $(f_m)_{Q^*}, (g_m)_{Q^*}, (f_{mx})_{Q^*}, (f_{my})_{Q^*}, (f_{mt})_{Q^*}, (g_{mx})_{Q^*}, (g_{my})_{Q^*}, (g_{mt})_{Q^*}, (Q_m)_{Q^*}$ 分别为 $f_m, g_m, \frac{\partial f_m}{\partial x}, \frac{\partial f_m}{\partial y}, \frac{\partial f_m}{\partial t}, \frac{\partial g_m}{\partial x}, \frac{\partial g_m}{\partial y}, \frac{\partial g_m}{\partial t}, Q_m$ 的值.

由文献 [7, 18] 可知

$$(u_{mt})_{Q^*} = (Q_m)_{Q^*} - (f_{mx})_{Q^*} - (g_{my})_{Q^*}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (f_{mx})_{Q^*} &= \sum_{l=1}^8 (f_{m,l})_{Q^*} (u_{l,x})_{Q^*}, (g_{mx})_{Q^*} = \\ &\sum_{l=1}^8 (g_{m,l})_{Q^*} (u_{l,x})_{Q^*}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (f_{my})_{Q^*} &= \sum_{l=1}^8 (f_{m,l})_{Q^*} (u_{l,y})_{Q^*}, (g_{my})_{Q^*} = \\ &\sum_{l=1}^8 (g_{m,l})_{Q^*} (u_{l,y})_{Q^*}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (f_{mt})_{Q^*} &= \sum_{l=1}^8 (f_{m,l})_{Q^*} (u_{l,t})_{Q^*}, (g_{mt})_{Q^*} = \\ &\sum_{l=1}^8 (g_{m,l})_{Q^*} (u_{l,t})_{Q^*}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $f_{m,l} = \frac{\partial f_m}{\partial u_l}$, $g_{m,l} = \frac{\partial g_m}{\partial u_l}$ 分别为 \mathbf{F}, \mathbf{G} 的 Jacobi 矩阵的各项. 容易看出, $(f_m)_{Q^*}, (g_m)_{Q^*}, (f_{mx})_{Q^*}, (f_{my})_{Q^*}, (f_{mt})_{Q^*}, (g_{mx})_{Q^*}, (g_{my})_{Q^*}, (g_{mt})_{Q^*}, (Q_m)_{Q^*}, (u_{mt})_{Q^*}$ 都是 $(u_m)_{Q^*}, (u_{mx})_{Q^*}, (u_{my})_{Q^*}$ 的函数. 因此只要求出 $(u_m)_{Q^*}, (u_{mx})_{Q^*}, (u_{my})_{Q^*}$, 就可以确定各变量以及流场的分布.

对式 (2) 积分, 可以得到

$$(u_m)_{Q^*}^n - \frac{\Delta t}{2} Q(u_m)_{Q^*} = \frac{\sum_{l=1}^4 R_m^{(l)}}{S}. \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} R_m^{(l)} &= S_q^{(l)} [(u_m)_{A_l^*}^{n-1/2} + (x_q^{(l)} - x_{A_l^*})(u_{mx})_{A_l^*}^{n-1/2} + \\ &(y_q^{(l)} - y_{A_l^*})(u_{my})_{A_l^*}^{n-1/2}] - \\ &\sum_{k=1}^2 \left\{ n_{kx}^{(l)} \left\{ [(f_m)_{A_l^*}^{n-1/2} - (f_{vm})_{A_l^*}^{n-1/2}] + \right. \right. \\ &(x_k^{(l)} - x_{A_l^*})(f_{mx})_{A_l^*}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{4} (f_{mt})_{A_l^*}^{n-1/2} + \\ &\left. \left. (y_k^{(l)} - y_{A_l^*})(f_{my})_{A_l^*}^{n-1/2} \right\} \right\} - \\ &\sum_{k=1}^2 \left\{ n_{ky}^{(l)} \left\{ [(g_m)_{A_l^*}^{n-1/2} - (g_{vm})_{A_l^*}^{n-1/2}] + \right. \right. \\ &(x_k^{(l)} - x_{A_l^*})(g_{mx})_{A_l^*}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{4} (g_{mt})_{A_l^*}^{n-1/2} + \\ &\left. \left. (y_k^{(l)} - y_{A_l^*})(g_{my})_{A_l^*}^{n-1/2} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $l = 1, 2, 3, 4$, $m = 1, 2, \dots, 8$, $k = 1, 2$; $(x_q^{(l)}, y_q^{(l)})$ 表示四个相邻四边形 $A_1B_1QB_4, A_2B_2QB_1, A_3B_3QB_2, A_4B_4QB_3$ 的重心坐标; $S_q^{(l)}$ 为这四个相邻四边形的面积; $A'_1B'_1B_4A_1(1, 1), A'_1B'_1B_1A_1(2, 1), A'_2B'_1B_1A_2(1, 2), A'_2B'_2B_2A_2(2, 2), A'_3B'_2B_2A_3(1, 3), A'_3B'_3B_3A_3(2, 3), A'_4B'_3B_3A_4(1, 4), A'_4B'_4B_4A_4(2, 4)$ 的重心坐标用 $(x_k^{(l)}, y_k^{(l)}, t^n - \Delta t/4)$ 表示 (括号中的数对是为每个面指定的 k, l 系数), 它们的表面矢量 (外法向矢量乘以面积) 为 $n_k^{(l)} = (n_{kx}^{(l)}, n_{ky}^{(l)}, 0)$; S 为八边形 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4$ 的面积.

由此, 再采取文献 [18] 使用的牛顿迭代法或文献 [12] 使用的龙格-库塔法处理源项, 便可根据已知的上一时刻 $(n-1/2)\Delta t$ 各物理量的值, 解出 $(u_m)_{Q^*}^n$ 的值.

本文采用一种有限差分再加权平均的方法求导数 $(u_{mx})_{Q^*}^n, (u_{my})_{Q^*}^n$. 令四边形 $A_1^*A_2^*A_3^*A_4^*$ 的重心为 $A^*(x_{A^*}, y_{A^*})$, 由此可以将 A_l^* 做空间变换到 $A_l^c(x_{A_l^c}, y_{A_l^c})$, $l = 1, 2, 3, 4$, 使得四边形 $A_1^cA_2^cA_3^cA_4^c$ 的重心为 Q^* , 有

$$\begin{aligned} x_{A_l^c} &= x_{A_l^*} + x_{Q^*} - x_{A^*}, y_{A_l^c} = \\ &y_{A_l^*} + y_{Q^*} - y_{A^*}, \\ l &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (15)$$

定义

$$(u_m)_{A_l^c} \stackrel{\text{def}}{=} u_m^*(x_{A_l^c}, y_{A_l^c}, t^n; A^*), \\ m = 1, 2, \dots, 8, \\ l = 1, 2, 3, 4. \quad (16)$$

$$(u_{mx})_{Q^*} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_x / \Delta, (u_{my})_{Q^*} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_y / \Delta. \quad (17)$$

其中,

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} x_{A_1^c} - x_{Q^*} & y_{A_1^c} - y_{Q^*} \\ x_{A_2^c} - x_{Q^*} & y_{A_2^c} - y_{Q^*} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

$$\Delta_x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} (u_m)_{A_1^c} - (u_m)_{Q^*} & y_{A_1^c} - y_{Q^*} \\ (u_m)_{A_2^c} - (u_m)_{Q^*} & y_{A_2^c} - y_{Q^*} \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$\Delta_y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} (u_m)_{A_1^c} - (u_m)_{Q^*} & x_{Q^*} - x_{A_1^c} \\ (u_m)_{A_2^c} - (u_m)_{Q^*} & x_{Q^*} - x_{A_2^c} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

将上面定义式中的点 (A_1^c, A_2^c) 换成 (A_2^c, A_3^c) , (A_3^c, A_4^c) , (A_4^c, A_1^c) , 用同样的方法可以定义 $(u_{mx})_{Q^*}^{(k)}$ 与 $(u_{my})_{Q^*}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

使用加权平均的方法, 就可以求得导数

$$(u_{mx})_{Q^*}^n, (u_{my})_{Q^*}^n, \quad m = 1, 2, \dots, 8.$$

定义

$$\theta_{mk} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{[(u_{mx})_{Q^*}^{(k)}]^2 + [(u_{my})_{Q^*}^{(k)}]^2}, \\ m = 1, 2, \dots, 8, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

$$W_m^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{m2}\theta_{m3}\theta_{m4},$$

$$W_m^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{m3}\theta_{m4}\theta_{m1},$$

$$W_m^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{m4}\theta_{m1}\theta_{m2},$$

$$W_m^{(4)} \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{m1}\theta_{m2}\theta_{m3},$$

当 $\theta_{mk} = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ 时

$$(u_{mx})_{Q^*} = 0, (u_{my})_{Q^*} = 0. \quad (21)$$

否则

$$(u_{mx})_{Q^*} = \sum_{k=1}^4 [(W_m^{(k)})^\alpha (u_{mx})_{Q^*}^{(k)}] / \sum_{k=1}^4 (W_m^{(k)})^\alpha,$$

$$(u_{my})_{Q^*} = \sum_{k=1}^4 [(W_m^{(k)})^\alpha (u_{my})_{Q^*}^{(k)}] / \sum_{k=1}^4 (W_m^{(k)})^\alpha \quad (22)$$

其中 $\alpha \geq 0$ 是可调常数, 反映 CESE 格式的粘性, 一般取 $\alpha = 1$ 或 2 . 为了避免分母是零, 实际计算时通常在式 (22) 的分母上加一个小量, 例如 10^{-60} .

4 CESE 格式的库朗数不敏感 (CNIS) 方法

前面介绍的 CESE- α 格式, 在局部 CFL 数小于 0.1 的时候, 会变得过于耗散. 为了改进这一问题, Chang^[19] 提出了库朗数不敏感 (CNIS) 方法. Yen^[20-21] 对其进行了简化. 本文采用 Yen 的方法, 并应用到四边形网格上.

根据式 (18)~(20), CESE- α 格式是用 $(u_m)_{A_l^c}$ 的值求导数 $(u_{mx})_{Q^*}, (u_{my})_{Q^*}$ 的值. CNIS 方法将其修正为, 用 P_l 点 u_m 的值求导数 $(u_{mx})_{Q^*}, (u_{my})_{Q^*}$ 的值. 其中 P_l 点位置如图 2 所示 (简便起见, 图中采用均匀网格, 因此 A_l, A_l^* 重合), 坐标为

$$x_{P_l} = x_q^{(l)} + \tau(x_{A_l^*} - x_q^{(l)}), \\ y_{P_l} = y_q^{(l)} + \tau(y_{A_l^*} - y_q^{(l)}), \\ l = 1, 2, 3, 4. \quad (23)$$

式中, τ 为解点 Q^* 对应的局部 CFL 数. Q^* 点的数值依赖域为图 3 中的灰色部分. 解析依赖域是图 4 中以 O 点为圆心, $c\Delta t/2$ 为半径的圆, 其中 c 为 x, y 两个方向较大的快磁声速. 解析依赖域必须包含在数值依赖域中, 因此有局部 CFL 数的公式

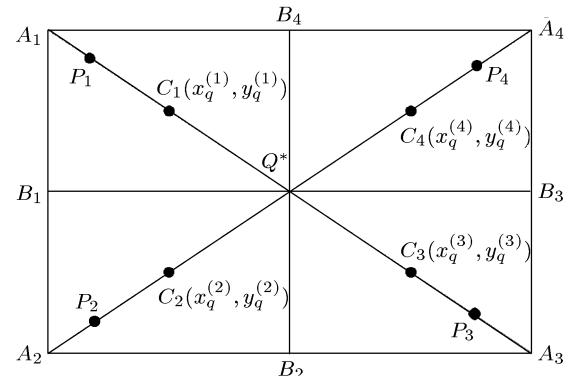


图 2 CNIS 方法中导数求法的改变

Fig. 2 Modification of calculation of derivative in CNIS method

$$\nu_1 = \frac{D_{Q^*M} + D_{MN}}{D_{Q^*L}} = \frac{(\Delta t/2)[\sqrt{u^2 + v^2} \cos(\varphi - \theta) + c]}{Q^*L} < 1.0$$

$$\tau = \max(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4). \quad (24)$$

式中 ν_2, ν_3, ν_4 可用相同方法, 在四边形的另外三条边上得到.

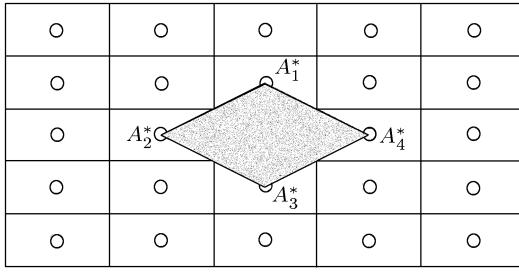


图 3 Q^* 点的数值依赖域

Fig. 3 Numerical domain of dependence of point Q^*

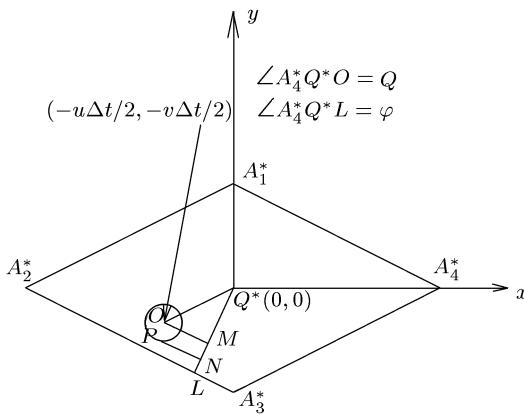


图 4 解析依赖域与数值依赖域之间的关系

Fig. 4 Relationship between the analytical domain of dependence and the numerical domain of dependence

5 高阶 CESE 格式

由式(1)可知, 与理想 MHD 不同, 在电阻 MHD 当中, 含有由磁场导数组成的 $\mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v$ 项, 使用上述一阶泰勒展开无法求得 $\mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v$ 的导数, 这里使用文献[22-23]的方法, 通过二阶泰勒展开, 求得 \mathbf{U} 的二阶导数, 从而求出由磁场二阶导数组成的 $\mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v$ 的一阶导数.

为简化起见, 假设使用均匀网格, 将 $(u_{mx})_{A_2^*}^{n-1/2}$, $(u_{mx})_{A_4^*}^{n-1/2}$ 在 Q^* 点进行泰勒展开, 经过适当整理, 得到

$$(u_{mx})_{A_2^*}^{n-1/2} - (u_{mx})_{Q^*}^n = (x_{A_2^*} - x_{Q^*})(u_{mxx})_{Q^*}^n - \frac{\Delta t}{2}(u_{mxt})_{Q^*}^n,$$

$$(u_{mx})_{A_4^*}^{n-1/2} - (u_{mx})_{Q^*}^n = (x_{A_4^*} - x_{Q^*})(u_{mxx})_{Q^*}^n - \frac{\Delta t}{2}(u_{mxt})_{Q^*}^n. \quad (25)$$

也即

$$(u_{mx})_{A_2^*}^{n-1/2} - (u_{mx})_{Q^*}^n = -\Delta x(u_{mxx})_{Q^*}^n - \frac{\Delta t}{2}(u_{mxt})_{Q^*}^n,$$

$$(u_{mx})_{A_4^*}^{n-1/2} - (u_{mx})_{Q^*}^n = \Delta x(u_{mxx})_{Q^*}^n - \frac{\Delta t}{2}(u_{mxt})_{Q^*}^n. \quad (26)$$

式(26)中的两式相加, 可得二阶导数 $(u_{mxt})_{Q^*}^n$ 的表达式

$$(u_{mxt})_{Q^*}^n = [2(u_{mx})_{Q^*}^n - (u_{mx})_{A_2^*}^{n-1/2} - (u_{mx})_{A_4^*}^{n-1/2}] / \Delta t. \quad (27)$$

得到 $(u_{mxt})_{Q^*}^n$ 的值后, 由式(26)可以求得 $(u_{mxx})_{Q^*}^n$ 的值. 用相同的方法, 可以求出 $(u_{myt})_{Q^*}^n, (u_{myy})_{Q^*}^n, (u_{mxy})_{Q^*}^n$ 的值. 由于这些二阶导数值里面有磁场的二阶导数, 因此就可以求得 $F_{vmx}, F_{vmy}, G_{vmx}, G_{vmy}, F_{vmt}, G_{vmt}$ 这些由磁场二阶导数构成项的值. 求得了所需的导数后, 式(15)修正为

$$R_m^{(l)} = S_q^{(l)}[(u_m)_{A_l^*}^{n-1/2} + (x_q^{(l)} - x_{A_l^*})(u_{mx})_{A_l^*}^{n-1/2} + (y_q^{(l)} - y_{A_l^*})(u_{my})_{A_l^*}^{n-1/2}] - \sum_{k=1}^2 \left\{ n_{kx}^{(l)} \left[(f_m)_{A_l^*}^{n-1/2} - (f_{vm})_{A_l^*}^{n-1/2} \right] + (x_k^{(l)} - x_{A_l^*})[(f_{mx})_{A_l^*}^{n-1/2} - (f_{vmt})_{A_l^*}^{n-1/2}] + \frac{\Delta t}{4} [(f_{mt})_{A_l^*}^{n-1/2} - (f_{vmt})_{A_l^*}^{n-1/2}] + (y_k^{(l)} - y_{A_l^*})[(f_{my})_{A_l^*}^{n-1/2} - (f_{vmy})_{A_l^*}^{n-1/2}] \right\} -$$

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ n_{ky}^{(l)} \left\{ [(g_m)_{A_l^*}^{n-1/2} - (g_{vm})_{A_l^*}^{n-1/2}] + (x_k^{(l)} - x_{A_l^*}) [(g_{mx})_{A_l^*}^{n-1/2} - (g_{vmt})_{A_l^*}^{n-1/2}] + \frac{\Delta t}{4} [(g_{mt})_{A_l^*}^{n-1/2} - (g_{vmt})_{A_l^*}^{n-1/2}] + (y_k^{(l)} - y_{A_l^*}) [(g_{my})_{A_l^*}^{n-1/2} - (g_{vmy})_{A_l^*}^{n-1/2}] \right\} \right\}. \quad (28)$$

6 计算结果及分析

6.1 触发重联问题

将文献 [16] 中的多电流片触发重联问题改成单电流片触发重联问题, 初始条件和边界条件中, 磁场

$$\mathbf{B} = B_x(y) \mathbf{i}_x, \quad B_x = -a \tanh y,$$

其中 $a = 0.5$, x, y 的范围为

$$0 \leq x \leq 10, \quad -2 \leq y \leq 2;$$

压强 $p = 1 + \beta - \mathbf{B}^2$, 密度 $\rho = p/\beta$, 其中等离子体热压磁压比 $\beta = 0.1$; 速度 $\mathbf{u} = (0, 0, 0)$, 电阻率 $\eta^* = 0.01$; $x = 0$ 与 $x = 10$ 处为周期边界条件, $y = \pm 2$ 处为自由边界条件.

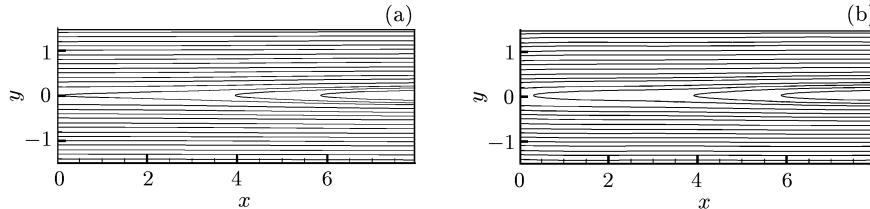


图 5 (a) $T = 60\tau_A$, (b) $T = 120\tau_A$ 的磁场位形

Fig. 5 Magnetic field configurations at $T = 60\tau_A$ (a) and $T = 120\tau_A$ (b)

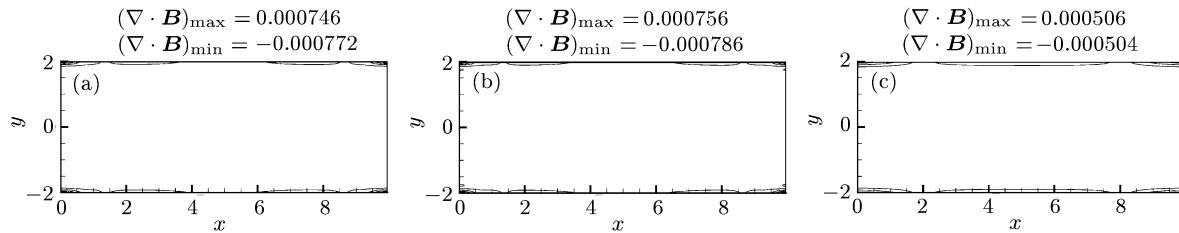


图 6 $T = 60\tau_A$ CESE- α 格式 (a)、高阶 CESE 格式 (b) 及 CNIS 方法 (c) 的等值线

Fig. 6 Contours of $\nabla \cdot \mathbf{B}$ at $T = 60\tau_A$ obtained from CESE- α method (a),

high order CESE method (b), CNIS CESE method (c)

为了触发重联, 在原有磁场上加一触发磁场 $B_{x1} = 0, B_{y1} = \varepsilon \sin(\pi x/10)$, ε 为一小量, 这里取 $\varepsilon = 0.001$. 计算所用网格为 200×200 , 也即 $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = 0.02$.

分别用 CESE- α 格式、高阶 CESE 格式、CNIS 方法计算这一重联问题. 为了度量 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 在整个流场中的大小, 定义磁场散度平均误差

$$\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}} = \frac{\sum_{k=1}^M |(\nabla \cdot \mathbf{B})_k|}{M}. \quad (29)$$

其中, M 为总网格数.

计算结果如图 5 所示. 图 5 仅给出了利用原始 α -CESE 方法得到的磁力线, 三种计算方法得到的磁场位形基本相同, 因此可以说明三种 CESE 方法都可以较好地模拟这一单电流片重联的过程.

三种方法得到的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线、等值线中的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 的全流场最大值和最小值 (见图 6 和图 7) 以及三种方法得到的 $\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$ 随时间的演化 (见图 8) 都反映出, 与其他两种方法相比, 高阶 CESE 的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 值明显较大. 而在模拟的前期 ($T < 60\tau_A$), CNIS 方法与 CESE- α 格式这两种方法的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 值十分接近, CNIS 方法的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 值要稍大一些. 在模拟的后期 ($T > 60\tau_A$), CNIS 方法的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 值明显小于 CESE- α 格式, 在 $120\tau_A$ 时, CNIS 方法的 $\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$ 值仅

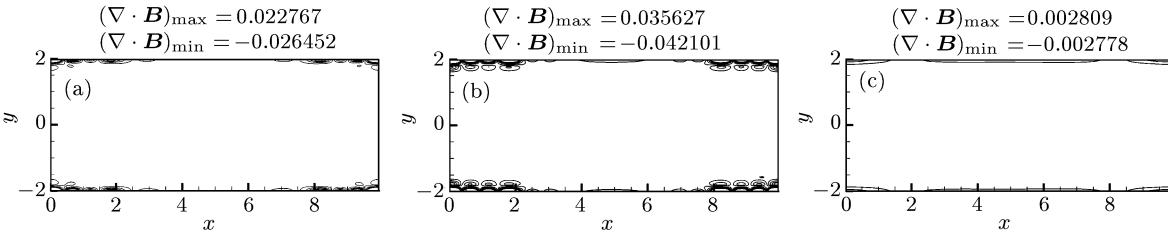


图 7 $T = 120\tau_A$ 时, CESE- α 格式 (a)、高阶 CESE 格式 (b) 及 CNIS 方法 (c) 的等值线

Fig. 7 Contours of $\nabla \cdot \mathbf{B}$ at $T = 120\tau_A$ obtained from CESE- α method (a),
high order CESE method (b), CNIS CESE method (c)

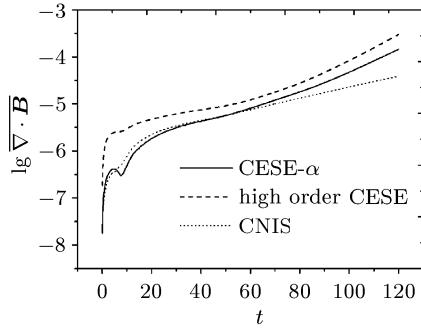


图 8 三种方法下 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 随时间的演化

Fig. 8 Evolutions of error ($\nabla \cdot \mathbf{B}$) by
the three approaches

为 CESE- α 格式的 $1/3$. 从整体而言, CNIS 方法的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 值随时间演化表现更平缓, 这样磁场散度相对不易随时间积累. 由此可见, 在控制磁场散度方面, CNIS 方法在本节所模拟的触发重联问题中表现最出色.

6.2 自发重联问题

考虑与文献 [15][18] 中相同的自发重联问题, 初始条件与边界条件中, 磁场

$$\mathbf{B} = [B_x(y), 0, 0].$$

其中, 在 $0 < y < 1$ 区间, $B_x(y) = \sin(\pi y/2)$; 在 $1 < y < Y_1$ 区间, $B_x = 1$; 在 $Y_1 < y < Y_m$ 区间, $Y_1 = 3.6$, $Y_m = Y_1 + 0.6$, $B_x(y) = \cos[(y - Y_1)\pi/1.2]$; 在 $y > Y_m$ 的区域内 $B_x = 0$, 而当 $y < 0$ 时 $B_x(y) = -B_x(-y)$. 压强 $p = 1 + \beta - B_x^2$, 其中 $\beta = 0.15$, 密度 $\rho = p/(1 + \beta)$, 速度 $\mathbf{u} = [0, 0, 0]$.

当 $0 < t < 4\tau_A$ 时, 电阻率

$$\eta^*(\mathbf{r}) = \eta_d \exp[-(x/1.4)^2 - (y/1.1)^2],$$

其中, $\eta_d = 0.02$. 在 $t > 4\tau_A$ 之后, 当 $v_d(\mathbf{r}, t) > v_C$ 时,

$$\eta^*(\mathbf{r}, t) = k_R[v_d(\mathbf{r}, t) - v_C], \quad k_R = 0.003.$$

当 $v_d(\mathbf{r}, t) < v_C$ 时,

$$\eta^*(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$v_d(\mathbf{r}, t) = |\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)/p(\mathbf{r}, t)|, \quad (\mathbf{j} \text{ 为电流})$$

$$v_C = v_{CO}[T(\mathbf{r}, t)/T_0]^{0.5}, \quad v_{CO} = 4, \quad T_0 = 1 + \beta.$$

计算区域为 $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 6$, 所用网格为 400×400 , 也即 $\Delta x = 0.05$, $\Delta y = 0.015$. $x = 0$, $y = 0$ 处均为对称边界条件, 这样, $y < 0$ 区域内的结果就可以由对称性得到. $x = 20$, $y = 6$ 处为自由边界条件. 三种方法下的计算结果如图 9 所示.

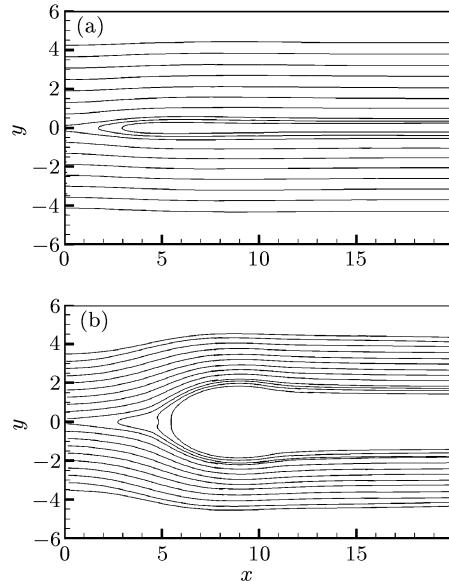


图 9 $T = 18\tau_A$ (a) 及 $T = 30\tau_A$ (b) 的磁场位形
Fig. 9 Magnetic field configurations at $T = 18\tau_A$ (a)
and $T = 30\tau_A$ (b)

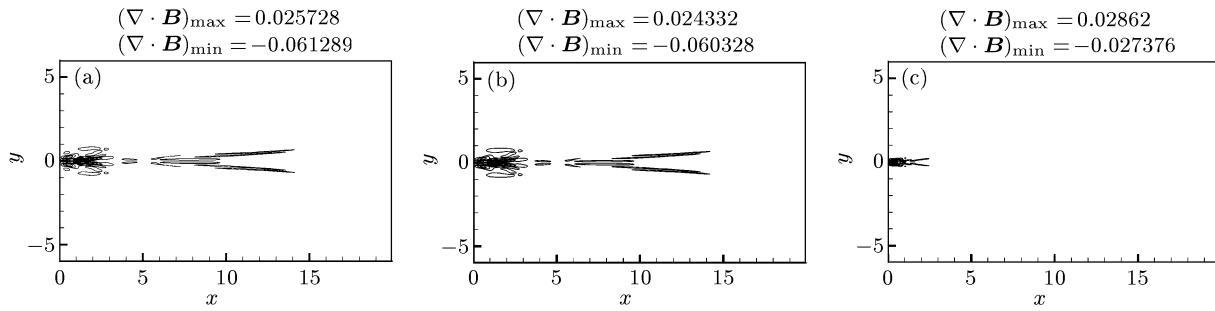
图 10 $T = 18\tau_A$ 时 CESE- α 格式 (a)、高阶 CESE 格式 (b) 及 CNIS 方法 (c) 的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线

Fig. 10 Contours of $\nabla \cdot \mathbf{B}$ at $T = 18\tau_A$ obtained from CESE- α method (a),
 high order CESE method (b), CNIS CESE method (c)

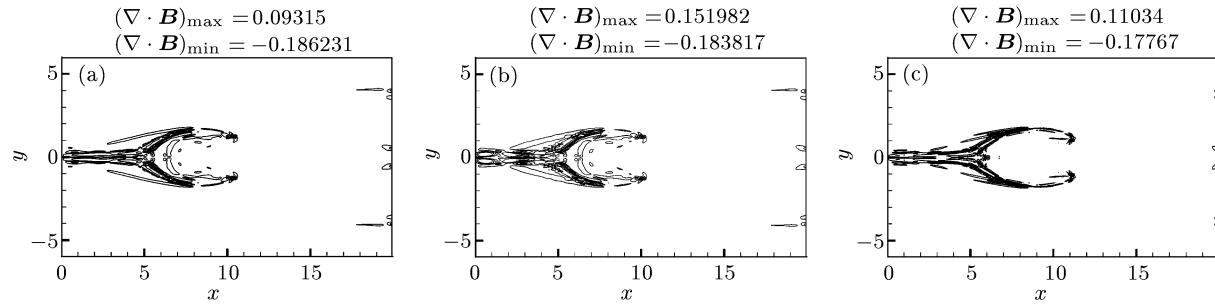
图 11 $T = 30\tau_A$ 时 CESE- α 格式 (a)、高阶 CESE 格式 (b) 及 CNIS 方法 (c) 的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线

Fig. 11 Contours of $\nabla \cdot \mathbf{B}$ at $T = 30\tau_A$ obtained from CESE- α method (a),
 high order CESE method (b), CNIS CESE method (c)

由 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线 (见图 10 和图 11) 可以看出, 在 $t = 18\tau_A$ 时, CESE- α 方法与高阶 CESE 方法的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线比较相似, 而 CNIS 方法得到的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线明显比另外两种方法得到的等值线稀疏, 在 $t = 30\tau_A$ 时, CESE- α 方法与高阶 CESE 方法的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线比较相似, 而 CNIS 方法得到的 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 等值线比另外两种方法得到的等值线略微稀疏, 两个时刻的全流场 $\nabla \cdot \mathbf{B}$ 的最大值及最小值与等值线反映出的结论一致.

由 $\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$ 随时间的演化结果 (见图 12) 可以看出, 在磁场重联进行的整个过程中, CESE- α 方法与高阶 CESE 方法的 $\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$ 值是比较接近的, 而 CNIS 方法的 $\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$ 值明显小于另外两种方法的 $\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$ 值, 结合上述由等值线得到的结论, 可见 CNIS 方法在控

制磁场散度方面表现得最好.

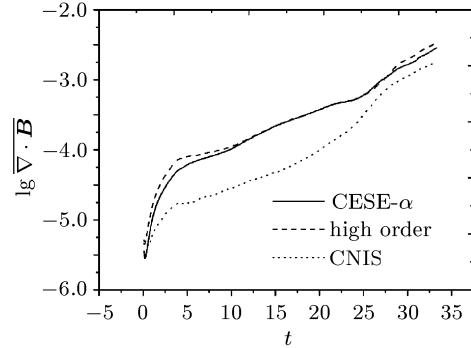
图 12 三种方法下 $\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$ 随时间的演化结果

Fig. 12 Evolutions of error ($\overline{\nabla \cdot \mathbf{B}}$) by the three approaches

7 结论

根据以上两个磁场重联问题的结果, 可以得到以下结论.

(1) 在不使用磁场校正方法的前提下, 本文所使用的三种方法可以较好地模拟文中的两个磁场重联问题, 所得到的磁场位形基本相同.

(2) 相比于另外两种方法, CNIS 方法在控制磁场散度方面表现得最好, 这可能是由于 CNIS 方法降低了数值粘性所致. CNIS 方法本身是为了控制局部 CFL 数过小时 CESE 格式出现过大的数值耗散而设计的, 它所特有的对原始 α -CESE 格式导数求法的改变, 是根据自适应思想做出的.

(3) 通过本文的数值实验可知, 对通常的差分数值格式求解磁流体力学问题, 采用磁场校正方法或使用自适应网格后, 可进一步降低磁场散度, 应能改进计算结果.

参考文献

- [1] Chang S C. The method of space-time conservation element and solution element—A new approach for solving the navier-stokes and Euler equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 1995, **119**:295-324
- [2] Gardiner T A, Stone J M. An unsplit godunov method for ideal MHD via constrained transport [J]. *J. Comput. Phys.*, 2005, **205**:509-539
- [3] Jiang G S, Wu C H. A high-order WENO finite difference scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics [J]. *J. Comput. Phys.*, 1999, **150**:561-594
- [4] Liska R, Wendroff B. Comparison of Several Difference Schemes on 1D and 2D test problems for the Euler Equations [J]. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2003, **25**:995-1017
- [5] Zhang M, et al. A space-time conservation element and solution element method for solving the two- and three-dimensional unsteady Euler equations using quadrilateral and hexahedral meshes [J]. *J. Comput. Phys.*, 2002, **175**:168-199
- [6] Wang X Y, Chang S C, Jorgenson P C E. Prediction of Sound Waves Propagating Through a Nozzle Without/With a Shock Wave using the Space-Time CE/SE Method [R]. AIAA2000-0222
- [7] Jorgenson P C, Loh C Y. Computing Axisymmetric Jet Screech Tones using Unstructured Grids [R]. AIAA 2002-3889
- [8] Loh C Y, Himansu A, Hultgren L S. A 3-D CE/SE Navier-Stokes Solver with Unstructured Hexahedral Grid for Computation of Nearfield Jet Screech Noise [R]. AIAA 2003-3207
- [9] Zhang Yongxiang, Chen Jingqiu. 2-D dam-break wave by using conservation element and solution element method [J]. *Chin. J. Hydraulic Eng.*, 2005, 10-1224-06. in Chinese (张永祥, 陈景秋. 用守恒元和解元法数值模拟二维溃坝洪水波 [J]. 水力学报, 2005, 0559-9350, 10-1224-06)
- [10] Weng Chunsheng, Gore T. Apply the CE/SE method to the simulation of unsteady detonation [J]. *Chin. Acta Aero. Sinica*, 2003, **21**(3):0258-1825. in Chinese (翁春生, 戈雷 T. CESE 方法在非定常爆轰计算中的应用 [J]. 空气动力学学报, 2003, **21**(3):0258-1825)
- [11] Yee H C, Sjögren B. Efficient low dissipative high order schemes for multiscale MHD flows. II: Minimization of numerical error [J]. *J. Sci. Comput.*, 2006, **29**:115-164
- [12] Zhang M, et al. Solving the MHD equations by the space-time conserving element and solution element method [J]. *J. Comput. Phys.*, 2006, **214**:599-617
- [13] Toth G. The constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes [J]. *J. Comput. Phys.*, 2000, **161**:605-652
- [14] Dedner A, et al. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations [J]. *J. Comput. Phys.*, 2002, **175**:645-673
- [15] Ugai M. Computer studies on the spontaneous fast reconnection model as a nonlinear instability [J]. *Phys. Plasmas*, 1999, **6**:1522
- [16] Wang S, et al. Magnetic reconnection in multiple heliospheric current sheets [J]. *Solar Phys.*, 1997, **173**(2):409-426
- [17] Feng X, et al. A 3rd order WENO GLM-MHD scheme for magnetic reconnection [J]. *Chin. J. Space Sci.*, 2006, **26**(1):1-7
- [18] Feng X, Hu Y. Modeling the resistive MHD by the CESE method [J]. *Solar Phys.*, 2006, **235**: 235-257
- [19] Chang S, Wang X. Multi-Dimensional Courant Number Insensitive CE/SE Euler Solvers for Applications Involving Highly Nonuniform Meshes [R]. AIAA 2003-5285
- [20] Yen J, Wagner D. Computational Aeroacoustics Using a Simplified Courant Number Insensitive CE/SE Method [R]. AIAA2005-2820
- [21] Yen J, Duell E. CAA Using 3D CESE Method with a Simplified Courant Number Insensitive Scheme [R]. AIAA2006-2417
- [22] Ayasoufi A, Keith T. Application of the conservation element and solution element method in numerical modeling of heat conduction with melting and/or freezing [J]. *Inter. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, 2002, **13**:448-472
- [23] Ayasoufi A, Keith T. Application of the conservation element and solution element method in numerical modeling of axisymmetric heat conduction with melting and/or freezing [J]. *JSME Inter. J.*, 2004, **47**:15-125