王浩鹏，赵敬民，吕佳锟等. 2022. 磁场散度为零的变分重构法在日冕太阳风数值模拟中的应用. 地球物理学报，65(8)：2779-2795，doi：10.6038/cjg2022P0818.

Wang H P, Zhao J M, Lü J K, et al. 2022. A solenoidality-preserving variational reconstruction method and its application to solar coronal MHD modeling. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 65(8): 2779-2795, doi: 10.6038/cjg2022P0818.

磁场散度为零的变分重构法在日冕太阳风数值模拟中的应用

王浩鹏[1,2]，赵敬民[1,2]，吕佳锟[1,2]，柳晓静[1*]

1 中国科学院国家空间科学中心，北京 100190

2 中国科学院大学地球与行星科学学院，北京 100049

摘要 本文利用保持平均磁场散度为零的限制条件，设计出了满足全局散度为零的变分重构方法(Globally solenoidality-preserving variational reconstruction approach, VR-GSP)，并将其应用于日冕太阳风磁流体力学(Magnetohydrodynamics, MHD)数值模拟中的磁场重构. 为评估该方法的有效性，我们模拟了 2234 卡林顿周(Carrington rotation, CR)的日冕结构. 在模拟中，我们将 VR-GSP 方法与 Feng 等(2019)中的基于最小二乘法的全局磁场散度为零的重构方法(Globally solenoidality-preserving least-squares method, LSQ-GSP)作了比较. 比较结果显示，基于 VR-GSP 方法的 MHD 模拟同样再现了 Solar Dynamics Observatory (SDO) 卫星、Solar and Heliospheric Observatory (SOHO)飞船以及 Wind 卫星观测到的包括冕流以及高低速流等大尺度日冕结构，而且相比于 LSQ-GSP，基于 VR-GSP 的 MHD 模拟的计算效率更高，从而也说明其更有助于在有限体积框架下设计出满足磁场散度为零的高效和紧致的数值方法，并应用于研究复杂强磁场环境下的磁流体力学问题.

关键词 散度为零；变分重构；太阳风；磁流体力学

doi:10.6038/cjg2022P0818　　**中图分类号** P353　　**收稿日期** 2021-11-03，2021-12-10 收修定稿

A solenoidality-preserving variational reconstruction method and its application to solar coronal MHD modeling

WANG HaoPeng[1,2], ZHAO JingMin[1,2], LÜ JiaKun[1,2], LIU XiaoJing[1*]

1 *SIGMA Weather Group, State Key Laboratory for Space Weather, National Space Science Center, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100190, *China*

2 *College of Earth and Planetary Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100049, *China*

Abstract In this paper, we design a globally solenoidality-preserving (GSP) approach based on variational reconstruction (VR) method and employ it to reconstruct the magnetic field in the simulation of 3D solar coronal plasma magnetohydrodynamics (MHD) problem. We abbreviate this method as VR-GSP method and implement the VR-GSP method in simulation of the steady-state solar wind in Carrington rotation (CR) 2234 to validate its capability of preserving solenoidality of magnetic field. Furthermore, we make a comparation between the GSP methods in VR sense (VR-GSP) and in the least-squares (LSQ) sense (Named as LSQ-GSP in this paper) (Feng et al.,

基金项目 国家自然科学基金(42030204, 41874202, 41861164026, 41774184)和空间天气学国家重点实验室自主课题项目资助.

第一作者简介 王浩鹏，男，1993 年生，博士研究生，主要从事日冕太阳风磁流体力学数值模拟研究. E-mail：2035468510@qq.com

* **通讯作者** 柳晓静，女，博士后，主要从事日冕三维磁流体力学数值模拟研究. E-mail：xjliu@swl.ac.cn

2019). Both methods reach almost the same simulation results for CR 2234, and the simulation results are basically consistent with the coronal observations by SDO and SOHO, and the mapped in situ observation by Wind. Furthermore, the MHD simulation based on VR-GSP perform better in term of calculation efficiency. Consequently, this VR-GSP method is promising for development of high-efficiency and compact numerical method, which is applicable to the simulation of complex MHD problems with strong magnetic field.

Keywords Solenoidality; Variational reconstruction (VR); Solar wind; Magnetohydrodynamics (MHD)

0 引言

太阳风是来自太阳的、持续的等离子体流(Abbo et al., 2016; Cranmer and Winebarger, 2019). 太阳风充斥于日地空间并携带行星际磁场向远离太阳的方向运动(Li et al., 2021). 剧烈的太阳爆发活动往往抛射出数以亿吨的高速日冕物质,朝向地球的高速运动的日冕物质能在几个小时到几天的时间内到达地球轨道,触发一系列灾害性空间天气. 太阳风暴如日冕物质抛射引发的灾害性空间天气,对人类社会的诸多天基和地基高科技活动,如卫星导航、无线电通讯、宇航员太空活动、飞行器太空作业以及电力系统运转等造成巨大的经济损失. 研究太阳活动机理,揭示太阳风暴传播演化规律,提前几小时到两三天时间预报出灾害空间天气,对维持人类的一系列高科技活动正常进行意义重大(冯学尚等, 2011, 2013; Feng, 2020a).

日地空间尺度有上亿千米,太阳爆发活动在日地空间的传播演化包含了多时间和空间尺度的复杂物理过程,进行 MHD 数值建模成为目前唯一能够自洽的连接巨大的日地空间的研究手段. 近几十年来,有一大批学者投身于用基于物理的三维 MHD 模型来进行日地空间的研究,极大地推动了太阳风 MHD 数值模拟在空间天气研究和应用领域中的发展(Feng 2020a). 在这些模拟中,基于近似黎曼解的有限体积法应用比较广泛(Feng, 2020b).

在太阳附近的日冕区域磁场较强,等离子体 β 较小. 在这些区域的等离子体团的磁压远大于热压,在数值模拟过程中,从能量导出的压强很容易出现非物理的负压. 在这些小 β 区域,显式数值方法中的时间步长受柯朗稳定条件限制而取值较小(一般小于 10^{-3} h),远远小于太阳风演化的时间尺度. 因此,在设计用于模拟日冕太阳风结构的 MHD 模型时,应当充分考虑数值算法保持密度和压强为正数的性质(保正性),计算效率的高效性.

HLL 类型的黎曼算子具有较好的保正性. Harten-Lax-van Leer (HLL)黎曼算子最早由 Harten 等(1983)提出并用于求解双曲守恒系统,在 HLL 黎曼扇中解变量被两个快波分为两个外部状态和一个中间状态. 近期,Wu 和 Shu(2019)在局部磁场散度为零的条件下严格证明了 HLL 黎曼算子的保正性,并用于二维磁流体力学问题中的数值模拟. 由于 HLL 算子具有较强的稳定性而且计算量较少,本文采用具有保正性的 HLL 黎曼算子来计算通过网格界面的数值通量.

在计算效率方面,Feng 等(2013)采用 GPU 高性能计算方式来提高计算速度,Wang 等(2019)通过隐式时间积分方法扩大时间推进过程中的时间步长来提高收敛效率,进而显著减少了稳态背景太阳风数值模拟的计算量,将模拟时间从几天缩短到了几个小时甚至几十分钟. 在 Wang 等(2019)和 Feng 等(2021)中分别用到了 GMRES(Generalized Minimal Residual)算法和 LU-SGS(lower-upper symmetric Gauss-Seidel)算法. GMRES 最早由 Saad 和 Schultz (1986)提出,是一种用于求解线性系统的全矩阵求解方法. 相对于 GMRES 方法,另外一种用于求解线性系统的 LU-SGS 方法则是一种近似分解方法. LU-SGS 方法将全矩阵 $[\boldsymbol{A}]$ 分解为上 $[\boldsymbol{L}]$、下 $[\boldsymbol{U}]$ 三角矩阵和对角阵 $[\boldsymbol{D}]$,并忽略了高阶无穷小项 $[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{D}]^{-1}[\boldsymbol{U}]$,即 $[\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{L}]+[\boldsymbol{D}]+[\boldsymbol{U}]\approx([\boldsymbol{L}]+[\boldsymbol{D}])[\boldsymbol{D}]^{-1}([\boldsymbol{U}]+[\boldsymbol{D}])\equiv[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{D}]^{-1}[\boldsymbol{U}]$. LU-SGS 方法最早由 Yoon 和 Jameson(1988)提出,具有无需求解全矩阵和占用存储空间少的优点,被广泛用于求解线性系统. 本文将采用后向欧拉隐式时间积分法,并用 LU-SGS 方法求解每一次时间推进过程中的线性方程组.

同时,自然界尚未观测到磁单极子的存在,磁场应满足散度为零的约束. 数值模拟中非零的磁场散度误差将产生非物理的平行于磁场的洛伦兹力,进而可能引发严重的数值稳定性问题. 在 MHD 数值模拟中尽量减小数值离散过程中产生的磁场散度误

差已成为大家普遍关注的问题，人们提出了多种控制磁场散度误差的方法，如 projection method（Brackbill and Barnes，1980）、constraint transport method（Evans and Hawley，1988；Yee，1966）、generalized Lagrange multiplier method（Dedner et al.，2002）、diffusive method（van der Holst and Keppens，2007）、source term approach（Dellar，2001；Janhunen，2000；Powell et al.，1999）等.在太阳风模拟中，Zhang 和 Feng（2016）比较了上述几种方法，发现都可以产生和观测相符的模拟结果.本文采用 Powell 提出的方八波方法（Powell et al.，1999），在守恒 MHD 方程中加入正比于磁场散度的源项，通过引入关于磁场散度的对流方程 $\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})+\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{B})=0$，将磁场散度误差输送出计算区域.

此外，Feng 等（2019）在最小二乘法的基础上加入平均磁场散度为零的限制设计出了保持全局磁场散度为零的磁场重构方法.相较于最小二乘法，变分重构方法（variable reconstruction method，VR）更加紧致，所需的重构模板更小（Liu et al.，2017；Li et al.，2018；Nishikawa，2018；Wang et al.，2017），有助于设计高阶高效率的重构方法.受此启发，本文基于 VR 方法，在重构磁场时加入平均磁场散度为零的限制条件，进而在变分重构法的基础上设计出了满足磁场散度为零的重构方法.

第 1 节介绍了本文日冕太阳风 MHD 模型中的控制方程.第 2 节介绍了本文中的网格系统和边界条件设置情况.第 3 节介绍了本文的数值方法，主要包括控制方程的离散以及本文提出的 VR-GSP 重构方法.第 4 节展示了本文基于 VR-GSP 方法的日冕太阳风 MHD 模型的模拟结果，并比较了分别基于本文 VR-GSP 方法和 Feng 等（2019）中的 LSQ-GSP 方法的 MHD 模型的模拟结果.第 5 节对本文中的方法做了总结，并对下一步的工作做了展望.

1　物理模型

日冕模型求解的是三维的理想 MHD 方程组.在近太阳表面的低等离子体 β 区域，由于磁压远大于热压，所以在由总能密度导出热压的浮点数计算中可能会得到非物理的负压值，从而导致模拟的失败.为避免负压值的出现，我们将磁场 $\boldsymbol{B}$ 分解为不随时间变化的势场 $\boldsymbol{B}_0=(B_{0x},B_{0y},B_{0z})^{\mathrm{T}}$，以及随时间演化的小量 $\boldsymbol{B}_1=(B_{1x},B_{1y},B_{1z})^{\mathrm{T}}$ 两部分，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1$，进而得到如下形式的 MHD 方程组（Feng et al.，2010，2012a；Fuchs et al.，2010；Guo，2015）：

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{Powell}}+\boldsymbol{S}_{\mathrm{gra}}+\boldsymbol{S}_{\mathrm{rot}}+\boldsymbol{S}_{\mathrm{heat}},\tag{1}$$

其中，

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho\boldsymbol{v}\\ E_1\\ \boldsymbol{B}_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})=\begin{pmatrix}\rho\boldsymbol{v}\\ \rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}+\left(p_{\mathrm{T1}}+\frac{\boldsymbol{B}_1^2}{2}+\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_0\right)\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{B}_1\\ (E_1+p_{\mathrm{T1}}+\boldsymbol{B}_1\cdot\boldsymbol{B}_0)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}_1)-\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}_1)\\ \boldsymbol{v}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{v}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{Powell}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{gra}}=-\frac{\rho GM_{\mathrm{s}}}{r^3}\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{rot}}=-\rho\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}\\ \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}))\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{heat}}=\begin{pmatrix}0\\ \boldsymbol{S}_{\mathrm{m}}\\ Q_{\mathrm{e}}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}_{\mathrm{m}}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}.\tag{2}$$

为便于描述，已在 $\boldsymbol{B}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_1$ 中乘以了系数 $\frac{1}{\sqrt{\mu_0}}$，其中 $\mu_0=4\times10^{-7}\pi\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$ 是磁导率.ρ 是等离子体的质量密度，$\boldsymbol{v}=(u,v,w)^{\mathrm{T}}$ 是速度矢量，$p=\Re\rho T$ 是热压，$\Re=1.653\times10^4\,\mathrm{m^2s^{-2}K^{-1}}$ 是气体常数，T 是温度，$E_1=\frac{p}{\gamma-1}+\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_1^2$，$\gamma$ 是太阳风等离子体的多方指数，此处取 $\gamma=1.05$（Steinolfson and Hundhausen，1988；Feng et al.，2021），$p_{\mathrm{T1}}=p+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_1^2$，$G=6.673\times10^{-11}\,\mathrm{m^3s^{-2}kg^{-1}}$ 是万有引力常数，$M_{\mathrm{s}}=1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg}$ 是太阳质量，$r=|\boldsymbol{r}|$ 是到日心的距离，$\boldsymbol{\omega}$ 表示太阳自转角速度，取 $|\boldsymbol{\omega}|=\frac{2\pi}{25.38}\mathrm{rad/day}$.$\boldsymbol{S}_{\mathrm{Powell}}$

表示 Powell 源项，$\boldsymbol{S}_{\mathrm{gra}}$ 表示太阳引力产生的引力源项，$\boldsymbol{S}_{\mathrm{rot}}$ 表示太阳自转产生的科里奥利力对应的源项，$\boldsymbol{S}_{\mathrm{heat}}$ 是日冕加热和太阳风加速源项（Nakamizo et al.，2009；Feng et al.，2010，2012a，2014），其中，考虑磁场拓扑结构对太阳风加速加热的影响，我们取

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}_{\mathrm{m}} &= M\left(\frac{r}{L_M}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{L_M}}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r},\\ Q_{\mathrm{e}} &= Q_1\mathrm{e}^{-\frac{r}{L_{Q_1}}}+Q_2\left(\frac{r}{L_{Q_2}}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{r}{L_{Q_2}}},\end{aligned}\tag{3}$$

在(3)式中，$M=M_0C_{\mathrm{a}}$，$Q_2=Q_0C_{\mathrm{a}}$，$C_{\mathrm{a}}=\dfrac{C'_{\mathrm{a}}}{\max(C'_{\mathrm{a}})}$，$C'_{\mathrm{a}}$ 是和太阳风的速度有关的一个经验表达式（Arge et al.，2004；Feng et al.，2021），我们取 $C'_{\mathrm{a}}=\dfrac{1-0.8\mathrm{e}^{-\theta_{\mathrm{b}}}}{(1+f_{\mathrm{s}})^{\frac{2}{9}}}$，其中 $f_{\mathrm{s}}=\dfrac{B_{r_0}R_{\mathrm{s}}^2}{B_{r_{\mathrm{ss}}}R_{\mathrm{ss}}^2}$ 为日冕磁场的膨胀系数，B_{r_0} 和 $B_{r_{\mathrm{ss}}}$ 分别表示太阳表面 R_{s} 和源表面 $R_{\mathrm{ss}}=2.5R_{\mathrm{s}}$ 处的径向磁场强度，θ_{b} 为开放磁力线在太阳表面上的足点距离闭合磁场区域边界的最小角距离，f_{s} 和 θ_{b} 由势场源表面模型（Arge et al.，2004；Reiss et al.，2019）计算所得的磁场决定. 此外，L_M，L_{Q_1} 和 L_{Q_2} 的取值为 $1R_{\mathrm{s}}$，$M_0=3.5\times10^{-13}\ \mathrm{N\cdot m^{-3}}$，$Q_0=9.44\times10^{-8}\,\mathrm{J\cdot m^{-3}s^{-1}}$，$Q_1=1.5\times10^{-10}\,\mathrm{J\cdot m^{-3}s^{-1}}$. 在模拟中，$\boldsymbol{r}$，$\rho$，$\boldsymbol{v}$，$p$，$\boldsymbol{B}$，$t$ 和 $\boldsymbol{\omega}$ 分别由 R_{s}，ρ_{s}，a_{s}，$\rho_{\mathrm{s}}a_{\mathrm{s}}^2$，$\sqrt{\rho_{\mathrm{s}}a_{\mathrm{s}}^2}$，$\dfrac{R_{\mathrm{s}}}{a_{\mathrm{s}}}$，和$\dfrac{a_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{s}}}$ 来进行无量纲化，其中 R_{s} 表示太阳半径，a_{s} 表示太阳表面的声速，ρ_{s} 表示太阳表面的密度.

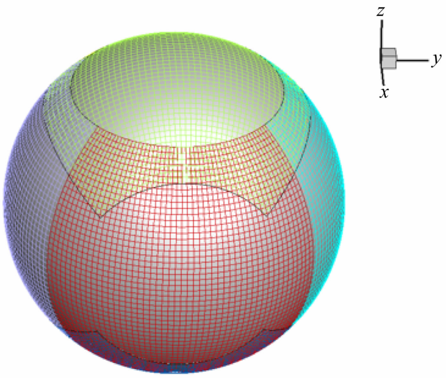

图 1　六片网格系统

Fig. 1　Six-component grid system

2　网格系统和初边值条件

2.1　网格系统

本文的计算区域是从 $1R_{\mathrm{s}}$ 至 $20R_{\mathrm{s}}$ 的球壳区域，网格系统采用的是六片网格系统（Feng et al.，2010；Feng，2020c），它是由六个完全相同的片组成，且每一片网格都是一个被定义在中低纬度区域 $\left[\dfrac{\pi}{4}-\delta_\theta\leqslant\theta\leqslant\dfrac{3\pi}{4}+\delta_\theta\right]\times\left[-\dfrac{\phi}{4}-\delta_\phi\leqslant\phi\leqslant\dfrac{\pi}{4}+\delta_\phi\right]$ 的球形网格，如图 1 所示，δ_θ 和 δ_ϕ 是两个可调参数，正比于两片网格间重合区域的最小网格间距.

本文依据 Feng 等（2021）进行网格划分，每个网格单元分别由八个顶点 $(r_{im},\theta_{jm},\phi_{km})$，$(r_{ip},\theta_{jm},\phi_{km})$，$(r_{im},\theta_{jp},\phi_{km})$，$(r_{ip},\theta_{jp},\phi_{km})$，$(r_{im},\theta_{jm},\phi_{kp})$，$(r_{ip},\theta_{jm},\phi_{kp})$，$(r_{im},\theta_{jp},\phi_{kp})$，$(r_{ip},\theta_{jp},\phi_{kp})$ 确定. 在 θ—和 ϕ—方向：$\theta_{jm}=\theta_{\min}+(j-2)\Delta\theta$，$\theta_{jp}=\theta_{(j+1)m}$，$j=0,\cdots,N_\theta+1$，$\Delta\theta=(\theta_{\max}-\theta_{\min})(N_\theta-2)$，$\delta_\theta=2\Delta\theta$；$\phi_{km}=\phi_{\min}+(k-2)\Delta\phi$，$\phi_{kp}=\phi_{(k+1)m}$，$k=0,\cdots,N_\phi+1$，$\Delta\phi=(\phi_{\max}-\phi_{\min})(N_\phi-2)$，$\delta_\phi=2\Delta\phi$. 其中，$N_\theta=N_\phi=42$，$\theta_{\min}=\dfrac{\pi}{4}$，$\theta_{\max}=\dfrac{3\pi}{4}$，$\phi_{\min}=-\dfrac{\pi}{4}$，$\phi_{\max}=\dfrac{\pi}{4}$. 在 r—方向：$r_{(i+1)m}=r_{im}+\Delta r_{im}$，$r_{ip}=r_{(i+1)m}$，当 $r_{im}<1.1R_{\mathrm{s}}$ 时，$\Delta r_{im}=0.01R_{\mathrm{s}}$；当 $1.1R_{\mathrm{s}}\leqslant r_{im}<3.5R_{\mathrm{s}}$ 时，$\Delta r_{im}=\min\left(A\times\ln\left(\dfrac{r_{im}}{R_{\mathrm{s}}}\right),r_{im}\Delta\theta\right)$，其中 $A=\dfrac{0.01R_{\mathrm{s}}}{\ln(1.09)}$；当 $r_{im}\geqslant3.5R_{\mathrm{s}}$ 时，$\Delta r_{im}=r_{im}\Delta\theta$.

2.2　初边值条件

本文计算区域内的磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 由基于太阳全球振荡监测网（Global Oscillation Network Group GONG）观测到的光球层径向磁场数据（网址：https://gong2.nso.edu/archive/patch.pl?menutype=z）的势场模型生成，随时间变化的小量 $\boldsymbol{B}_1$ 的初始量为 $\boldsymbol{0}$，初始密度 ρ、径向速度 v_{r} 和压强 p 由一维的 Parker 解（Parker，1963）给出. 太阳表面的质子数密度设置为 $1.5\times10^8\ \mathrm{cm^{-3}}$，太阳表面温度为 1.3×10^6 K.

内边界位于太阳表面，在此处施加回流边界条件（Groth et al.，2000；Feng et al.，2007，2019），根据当地的径向速度 v_{r} 设置边界条件：

如果 $v_{\mathrm{r}}>0$

$$\rho=\rho_{\mathrm{s}},p=\frac{1}{\gamma},\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0;$$

如果 $v_{\mathrm{r}}\leqslant0$

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=0,\frac{\partial p}{\partial r}=0,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0.$$

外边界位于超声速、超阿尔芬速区域，本文直接将 $r^2\rho$，r^2v_{r}，v_θ，rv_ϕ，r^2B_{r}，B_θ，rB_ϕ 进行等值外推，其中 v_θ，v_ϕ，B_{r}，B_θ 分别表示速度和磁场在 θ—和 ϕ—方向的分量.

3　数值方法

在本节中，我们主要介绍了控制方程的离散以及 VR-GSP 重构算法的推导.

3.1　空间积分

在网格单元 cell_i 上对方程(1)进行积分，得到方程的半离散格式(Feng，2020b)：

$$\begin{aligned} V_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_i}{\mathrm{d}t} &= -\oint_{\partial V_i} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\Gamma + V_i \boldsymbol{S}_i \\ &= -\sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \Gamma_{ij} + V_i \boldsymbol{S}_i , \end{aligned} \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{U}_i = \frac{1}{V_i}\int_{V_i} \boldsymbol{U} \mathrm{d}V$ 和 $\boldsymbol{S}_i = \frac{1}{V_i}\int_{V_i} \boldsymbol{S} \mathrm{d}V$ 分别是网格单元 cell_i 中守恒变量 $\boldsymbol{U}$ 和源项 $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{\mathrm{Powell}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{gra}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{rot}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{heat}}$ 的体平均值，V_i 表示cell_i 的体积，∂V_i 为 cell_i 的外表面，$\mathrm{d}V$ 和 $\mathrm{d}\Gamma$ 分别表示体积微元和面积微元. 为便于描述，现引入表示残差项的符号 $\boldsymbol{R}$，使得

$$\boldsymbol{R}_i = \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \Gamma_{ij} - V_i \boldsymbol{S}_i ,$$

其中，Γ_{ij} 表示网格单元 cell_i 和 cell_j 的交界面，也表示交界面 Γ_{ij} 的面积，$\boldsymbol{n}_{ij}$ 表示界面 Γ_{ij} 上由 cell_i 指向 cell_j 的单位法向量，$\boldsymbol{F}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij}$ 表示沿界面 Γ_{ij} 法向量方向的对流通量. 此时，方程(4)可简写为

$$V_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}_i}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{R}_i . \tag{5}$$

由对流通量的旋转不变性(Tanaka，1994)，得

$$\boldsymbol{F}_{ij}(\boldsymbol{U}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{U}_{\mathrm{R}}) \cdot \boldsymbol{n}_{ij} = \boldsymbol{T}_{8ij}^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{T}_{8ij}\boldsymbol{U}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{T}_{8ij}\boldsymbol{U}_{\mathrm{R}}), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{T}_{8ij} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} & 0 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & T_{ij} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ 0 & \boldsymbol{0} & 1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & T_{ij} \end{pmatrix},$$

在本文中，我们采用 $\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}$ 和 $\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}$ 分别表示 $\boldsymbol{T}_{8ij}\boldsymbol{U}_{\mathrm{L}}$ 和 $\boldsymbol{T}_{8ij}\boldsymbol{U}_{\mathrm{R}}$，下标 L 和下标 R 分别表示位于界面 Γ_{ij} 左右两侧的状态. 在上述表达式中，

$$\boldsymbol{T}_{ij} = \begin{pmatrix} n_{ij,x} & n_{ij,y} & n_{ij,z} \\ t_{1ij,x} & t_{1ij,y} & t_{1ij,z} \\ t_{2ij,x} & t_{2ij,y} & t_{2ij,z} \end{pmatrix}$$

是将(x,y,z)坐标系旋转到(n,t_1,t_2) 坐标系的旋转矩阵(Yalim，2008；Feng，2020b，and references therein)，其中，$\boldsymbol{t}_1 = (t_{1ij,x}, t_{1ij,y}, t_{1ij,z})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{t}_2 = (t_{2ij,x}, t_{2ij,y}, t_{2ij,z})^{\mathrm{T}}$ 表示界面 Γ_{ij} 上两个正交的单位切向量，且与 $\boldsymbol{n}_{ij}$ 组成右手系的(n,t_1,t_2)直角坐标系. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}, \boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}})$ 表示局部坐标系(n,t_1,t_2)中 $\boldsymbol{n}_{ij}$ 方向上的通量，因此，旋转不变性将多维问题转换成了局部的一维问题来进行计算. 本文采用 HLL 黎曼算子来计算通量 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}, \boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}})$，即

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}, \boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}) = \boldsymbol{f}_{\mathrm{HLL}}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}, \boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}})) - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}, \boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}),$$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}, \boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}) = \frac{\mathrm{S}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}) - \mathrm{S}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}) + \mathrm{S}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}) - \mathrm{S}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}})}{\mathrm{S}_{\mathrm{R}} - \mathrm{S}_{\mathrm{L}}} - \frac{2\mathrm{S}_{\mathrm{R}}\mathrm{S}_{\mathrm{L}}}{\mathrm{S}_{\mathrm{R}} - \mathrm{S}_{\mathrm{L}}}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}} - \boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}),$$

S_{L} 和 S_{R} 表示两个快波的速度，其具体取法请参考 Wu 和 Shu(2019).

为计算方程(5)中残差项 $\boldsymbol{R}_i$ 的值，需要重构出网格 cell_i 的界面上的变量值. 在本文中，我们采用二阶重构方法，从分别以网格 cell_i 和 cell_j 为中心的模板中重构位于界面 Γ_{ij} 的面心上的原始变量的值 $\boldsymbol{W}_\alpha = (\rho_\alpha, u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha, p_\alpha, B_{1x\alpha}, B_{1y\alpha}, B_{1z\alpha}), \alpha \in \{L,R\}$.

3.2　线性最小二乘法重构

在网格 cell_i 中，ρ,u,v,w,p 在位置 $\boldsymbol{x}$ 的重构表达式如下：

$$X_i(\boldsymbol{x}) = X|_i + \phi_i(\nabla X)|_i \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i), \quad X \in \{\rho, u, v, w, p\}$$

其中，$\boldsymbol{x}_i$ 表示网格 cell_i 的体心坐标，$X|_i$ 表示变量 X 在 $\boldsymbol{x}_i$ 处的值，$(\nabla X)|_i$ 表示变量 X 在 $\boldsymbol{x}_i$ 处的导数值，ϕ_i 是一个用来抑制震荡的 Barth 类型限制器(Barth and Jespersen，1989)，和 Feng 等(2021)中的取法一致. $(\nabla X)|_i$ 通过 LSQ 方法(Barth，1991，1993)获得，本文中的 LSQ 重构模板包括 cell_i 和与 cell_i 共面、共线以及共顶点的 26 个相邻网格单元.

3.3　VR-GSP 重构方法

此小节主要介绍本文提出的消去磁场散度误差的 VR-GSP 方法. 受 Feng 等(2019)在磁场最小二乘重构的基础上加入 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 的限制条件而有效消除全局磁场散度误差的启发，我们在磁场变分重构(VR)方法的基础上加入了 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 的限制条件，从而设计出了一种可以有效消除全局磁场散度误差的 VR-GSP 重构方法.

在以 cell_i 和 cell_j 为中心的模板中，我们可以得到两网格共享界面 Γ_{ij} 的面心 $\boldsymbol{x}_{ij}$ 处的磁场各分量值 $X_{\mathrm{L}} = X_i(\boldsymbol{x}_{ij})$ 和 $X_{\mathrm{R}} = X_j(\boldsymbol{x}_{ij})$，$X \in \{B_x, B_y, B_z\}$，具体表达式如下：

$$X_i(\boldsymbol{x}_{ij}) = X|_i + (\nabla X)|_i \cdot (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_i), X_j(\boldsymbol{x}_{ij}) = X|_i + (\nabla X)|_j \cdot (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_i). \tag{7}$$

依据 Wang 等(2017)、Li 等(2018)和 Nishikawa (2018)等,我们对磁场采取变分重构法,也就是通过使变量在所有界面处的间断最小这样一个约束条件而将计算区域所有网格中待求解的多项式系数(或导数值)耦合在一起,进而迭代求解出耦合系统中每个网格中待求解的导数值.换句话说,就是寻找使下述函数值取最小值的导数变量 $(\nabla X)|_i$

$$\mathcal{F} = \sum_{j\in\{V_j\}_i} \frac{1}{2L_{ij}} \int_{\Gamma_{ij}} \Delta \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{V} \mathrm{d}\Gamma, \tag{8}$$

其中,

$$\Delta \boldsymbol{V} = \Omega \Delta \boldsymbol{X}, \Delta \boldsymbol{X} = (X_{\mathrm{R}} - X_{\mathrm{L}}, (\nabla X)|_j - (\nabla X)|_i),$$
$$\Omega = \mathrm{diag}(1, \omega_x L_x, \omega_y L_y, \omega_z L_z),$$

L_x, L_y, L_z 表示网格长度尺度,$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 表示权重,$\{V_j\}_i$ 表示仅包含网格单元 cell_i 和与 cell_i 共面的 6 个邻居网格的重构模板.利用中值定理计算方程(8)里的面积分,可得

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{j\in\{V_j\}_i} \Delta \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \Delta \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q} = \frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}} \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Omega}.$$

参考 Nishikawa (2018),我们取 $L_x = x_j - x_i, L_y = y_j - y_i, L_z = z_j - z_i, \omega_x = 1, \omega_y = 1, \omega_z = 1$,以及

$$L_{ij} = \sqrt{\Gamma_{ij}} \sum_{k=1}^{6} \sqrt{\Gamma_{ik}}.$$

为了使函数 $\mathcal{F}$ 的值最小,我们使方程(7)中的多项式系数 $\boldsymbol{g}_i = (\nabla X)|_i = \left(\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \frac{\partial X}{\partial z}\right)$ 满足下述条件:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{g}_i} = \sum_{j\in\{V_j\}_i} \left(Q \frac{\partial \Delta \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{g}_i}\right)^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$

其中,

$$\Delta \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}_j \boldsymbol{g}_j - \boldsymbol{\mu}_i \boldsymbol{g}_i + (X|_j - X|_i) \boldsymbol{e}_1$$

$$\boldsymbol{\mu}_k = \begin{pmatrix} \Delta x_k & \Delta y_k & \Delta z_k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{ij} - x_k & y_{ij} - y_k & z_{ij} - z_k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \{i, j\}$$

由方程(9)得到

$$\boldsymbol{A}_{ii} \boldsymbol{g}_i - \sum_{j\in\{V_j\}_i} \boldsymbol{A}_{ij} \boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{b}_i, \tag{10}$$

其中,

$$\boldsymbol{A}_{ii} = \sum_{j\in\{V_j\}_i} \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\mu}_i = \sum_{j\in\{V_j\}_i} \frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}} \begin{pmatrix} \Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2 & \Delta x_i \Delta y_i & \Delta x_i \Delta z_i \\ \Delta x_i \Delta y_i & \Delta y_i^2 + \omega_y^2 L_y^2 & \Delta y_i \Delta z_i \\ \Delta x_i \Delta z_i & \Delta y_i \Delta z_i & \Delta z_i^2 + \omega_z^2 L_z^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{ij} = \boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{\mu}_j = \frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}} \begin{pmatrix} \Delta x_i \Delta x_j + \omega_x^2 L_x^2 & \Delta x_i \Delta y_j & \Delta x_i \Delta z_j \\ \Delta y_i \Delta x_j & \Delta y_i \Delta y_j + \omega_y^2 L_y^2 & \Delta y_i \Delta z_j \\ \Delta z_i \Delta x_j & \Delta z_i \Delta y_j & \Delta z_i \Delta z_j + \omega_z^2 L_z^2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{b}_i = \sum_{j\in\{V_j\}_i} \frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}} \begin{pmatrix} (X_j - X_i) \Delta x_i \\ (X_j - X_i) \Delta y_i \\ (X_j - X_i) \Delta z_i \end{pmatrix}.$$

在方程(10)中,网格 cell_i 体心处的导数值 $\boldsymbol{g}_i$ 和与 cell_i 共面的邻居网格 cell_j 体心处的导数值 $\boldsymbol{g}_j$ 均是待求解的未知量,因此计算区域所有网格中待求解的导数值是耦合在一起的.本文采用 Gauss-Seidel 迭代法(Wang et al., 2017)来求解这个耦合系统.

参考 Feng 等(2019); Hopkins(2016),网格 cell_i 中的磁场散度平均值可按如下方式计算

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} (\nabla \cdot \boldsymbol{B}) \mathrm{d}V = \frac{1}{V_i} \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{B}_{ij} \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \Gamma_{ij},$$
$$\boldsymbol{B}_{ij} = \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{L}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}}{2}. \tag{11}$$

由 $(\nabla \cdot \boldsymbol{B})_i = 0$ 可得

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{B})_i = \frac{1}{2V_i} \sum_{j=1}^{6} (\boldsymbol{B}_i + (\nabla \otimes \boldsymbol{B})|_i \cdot (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{B}_j + (\nabla \otimes \boldsymbol{B})|_j \cdot (\boldsymbol{x}_{ij} - \boldsymbol{x}_j)) \cdot \boldsymbol{n}_{ij} \Gamma_{ij} = 0, \tag{12}$$

其中,

$$(\nabla \otimes \boldsymbol{B})|_{i \backslash j} = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & \frac{\partial B_y}{\partial x} & \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}\right|_{i \backslash j},$$

下标 $|_i$ 和 $|_j$ 分别表示相应变量在网格 cell_i 和 cell_j 的体心处的取值.

将方程(12)代入(10)而消去 $\dfrac{\partial B_x}{\partial x}$，可得(这也是 VR-GSP 的核心)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_3 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{ii} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{ii} \end{pmatrix}_{9\times 8} \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{g}}_i^{B_x} \\ \boldsymbol{g}_i^{B_y} \\ \boldsymbol{g}_i^{B_z} \end{pmatrix}_{8\times 1} = \sum_{j=1}^{6} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{ij} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{ij} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_{ij} \end{pmatrix}_{9\times 9} \begin{pmatrix} \boldsymbol{g}_j^{B_x} \\ \boldsymbol{g}_j^{B_y} \\ \boldsymbol{g}_j^{B_z} \end{pmatrix}_{9\times 1} + \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{R}}^{B_x} \\ \boldsymbol{R}^{B_y} \\ \boldsymbol{R}^{B_z} \end{pmatrix}_{9\times 1}, \tag{13}$$

其中，

$$\boldsymbol{C}_1 = \sum_{j=1}^{6} \frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}} \begin{pmatrix} \Delta x_i \Delta y_i - (\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & \Delta x_i \Delta z_i - (\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \\ \Delta y_i^2 + \omega_y^2 L_y^2 - \Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & \Delta y_i \Delta z_i - \Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \\ \Delta y_i \Delta z_i - \Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & \Delta z_i^2 + \omega_z^2 L_z^2 - \Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \end{pmatrix}_{3\times 2},$$

$$\boldsymbol{C}_2 = \sum_{j=1}^{6} \frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}} \begin{pmatrix} -(\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -(\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -(\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \\ -\Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \\ -\Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,y} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \end{pmatrix}_{3\times 3},$$

$$\boldsymbol{C}_3 = \sum_{j=1}^{6} \frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}} \begin{pmatrix} -(\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -(\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -(\Delta x_i^2 + \omega_x^2 L_x^2) \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \\ -\Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta y_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \\ -\Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta y_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} & -\Delta x_i \Delta z_i \dfrac{\sum_{j=1}^{6} \Delta z_i n_{ij,z} \Gamma_{ij}}{\sum_{j=1}^{6} \Delta x_i n_{ij,x} \Gamma_{ij}} \end{pmatrix}_{3\times 3},$$

$$\boldsymbol{g}_{i\backslash j}^{\alpha}=\left(\frac{\partial\alpha_{i\backslash j}}{\partial x},\frac{\partial\alpha_{i\backslash j}}{\partial y},\frac{\partial\alpha_{i\backslash j}}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{R}^{\alpha}=\sum_{j=1}^{6}\frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}}((\alpha_j-\alpha_i)\Delta x_i,(\alpha_j-\alpha_i)\Delta y_i,(\alpha_j-\alpha_i)\Delta z_i)^{\mathrm{T}},\alpha\in\{B_x,B_y,B_z\},$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_i^{B_x}=\left(\frac{\partial B_x}{\partial y},\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}},\quad \widetilde{\boldsymbol{R}}^{B_x}=\boldsymbol{R}^{B_x}-\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{6}\frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}}(\Delta x_i^2+\omega_x^2L_x^2)\frac{\boldsymbol{R}^B}{\sum_{j=1}^{6}\Delta x_i n_{ij,x}\Gamma_{ij}}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{6}\frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}}(\Delta x_i\Delta y_i)\frac{\boldsymbol{R}^B}{\sum_{j=1}^{6}\Delta x_i n_{ij,x}\Gamma_{ij}}\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{6}\frac{\Gamma_{ij}}{L_{ij}}(\Delta x_i\Delta z_i)\frac{\boldsymbol{R}^B}{\sum_{j=1}^{6}\Delta x_i n_{ij,x}\Gamma_{ij}}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}^B=-\sum_{j=1}^{6}(\boldsymbol{B}_i+\boldsymbol{B}_j+(\nabla\otimes\boldsymbol{B})|_j\cdot(\boldsymbol{x}_{ij}-\boldsymbol{x}_j))\cdot\boldsymbol{n}_{ij}\Gamma_{ij},$$

然后通过迭代方式求解方程(13),即

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1&\boldsymbol{C}_2&\boldsymbol{C}_3\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_{ii}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_{ii}\end{pmatrix}_{9\times8}\begin{pmatrix}\tilde{\boldsymbol{g}}_i^{B_x}\\ \boldsymbol{g}_i^{B_y}\\ \boldsymbol{g}_i^{B_z}\end{pmatrix}_{8\times1}^{k}=\sum_{j=1}^{6}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{ij}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_{ij}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}_{ij}\end{pmatrix}_{9\times9}\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_j^{B_x}\\ \boldsymbol{g}_j^{B_y}\\ \boldsymbol{g}_j^{B_z}\end{pmatrix}_{9\times1}^{k-1}+\begin{pmatrix}(\widetilde{\boldsymbol{R}}^{B_x})^{k-1}\\ \boldsymbol{R}^{B_y}\\ \boldsymbol{R}^{B_z}\end{pmatrix}_{9\times1}$$

上标 k 表示第 k 次迭代,根据方程(12),$\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}\right)^{k-1}$ 由 $(\tilde{\boldsymbol{g}}_i^{B_x})^{k-1}$,$(\boldsymbol{g}_i^{B_y})^{k-1}$,$(\boldsymbol{g}_i^{B_z})^{k-1}$,$(g_j^{B_x})^{k-1}$,$(g_j^{B_y})^{k-1}$,$(g_j^{B_z})^{k-1}$,$\boldsymbol{B}|_i$,$\boldsymbol{B}|_j$ 表示出来. 此迭代方法的收敛标准是判断相邻两次迭代所得的整个计算区域内 N 个网格中的多项式系数差的平均值 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\partial B_x}{\partial y}|_i^k-\frac{\partial B_x}{\partial y}|_i^{k-1}\right|+\left|\frac{\partial B_x}{\partial z}|_i^k-\frac{\partial B_x}{\partial z}|_i^{k-1}\right|+\cdots+\left|\frac{\partial B_z}{\partial z}|_i^k-\frac{\partial B_z}{\partial z}|_i^{k-1}\right|\right)$ 是否小于某个小量 ε,满足时则迭代停止,从而获得当前时刻待求解的多项式系数. 为加快收敛,本文取上一时刻的多项式系数值作为当前时刻迭代过程的初始值. 本文中对初始磁场 $\boldsymbol{B}_0$ 取 $\varepsilon=10^{-9}$,对磁场 $\boldsymbol{B}_1$ 取 $\varepsilon=10^{-5}$.

3.4 时间离散

在时间方向上,本文采用的是后向欧拉方法,将方程(5)写为

$$V_i\frac{\Delta\boldsymbol{U}_i^n}{\Delta t}=-\boldsymbol{R}_i^{n+1},\qquad(14)$$

其中,$\Delta\boldsymbol{U}_i^n=\boldsymbol{U}_i^{n+1}-\boldsymbol{U}_i^n$,$\boldsymbol{U}_i^{n+1}$ 和 $\boldsymbol{U}_i^n$ 分别表示 t^n 和 t^{n+1} 时刻网格 cell_i 中的守恒变量的值,Δt 表示时间步长,且

$$\Delta t=\mathrm{CFL}\cdot\min_{\forall\,\mathrm{cell}_i}\frac{\Delta h_i}{\max\limits_{\forall\,\mathrm{faces}}(|v_n|+c_{f,n})},\qquad(15)$$

其中,Δh_i 表示网格 cell_i 的特征长度,本文取为 cell_i 的最小内切球半径,v_n 和 $c_{f,n}$ 分别表示 cell_i 的表面上沿外法向方向的等离子体速度与快磁声速,CFL 表示柯朗数,在本文的隐式方法中取 CFL=10.

将方程(14)中的非线性残差项 $\boldsymbol{R}_i^{n+1}$ 在 $(\boldsymbol{U}^n,t^n)$ 线性化展开

$$\boldsymbol{R}_i^{n+1}=\boldsymbol{R}_i^n+\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}_i}{\partial\boldsymbol{U}_i}\right)^n\Delta\boldsymbol{U}_i^n+\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}_i}{\partial\boldsymbol{U}_j}\right)^n\Delta\boldsymbol{U}_j^n,$$

从而得到如下线性系统

$$\boldsymbol{A}_{8N\times8N}\Delta\boldsymbol{U}_{8N}^n=-\boldsymbol{R}_{8N}^n,$$

为保持雅可比矩阵的对角占优性,本文采取 Otero 和 Eliasson (2015a,b); Feng 等(2021)中的近似线性化方法,将 $\boldsymbol{R}_i^{n+1}$ 在 $(\boldsymbol{U}^n,t^n)$ 线性化展开为

$$\boldsymbol{R}_i^{n+1}=\boldsymbol{R}_i^n+\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}'_i}{\partial\boldsymbol{U}_i}\right)^n\Delta\boldsymbol{U}_i^n+\left(\frac{\partial\boldsymbol{R}'_i}{\partial\boldsymbol{U}_j}\right)^n\Delta\boldsymbol{U}_j^n,$$

其中

$$\boldsymbol{R}'_i=\sum_{j=1}^{6}\boldsymbol{T}_{8ij}^{-1}\boldsymbol{f}'_{\mathrm{HLL}}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}},\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}})\Gamma_{ij}-V_i\boldsymbol{S}_i,$$

$$\boldsymbol{f}'_{\mathrm{HLL}}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}},\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}))-\frac{1}{2}\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}},\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}),$$

$$\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}},\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}},\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}})+0.8\lambda^{\max}(\boldsymbol{U}_{n\mathrm{R}}-\boldsymbol{U}_{n\mathrm{L}}),$$
$$\lambda^{\max}=|v_n|+c_{f,n}.$$

进而得到下述线性系统,

$$\boldsymbol{A}'_{8N\times8N}\Delta\boldsymbol{U}_{8N}^n=-\boldsymbol{R}_{8N}^n,\qquad(16)$$

本文用 LU-SGS 方法求解线性系统(16),得到 $\boldsymbol{U}^{n+1}=\boldsymbol{U}^n+\Delta\boldsymbol{U}^n$. 当 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|\boldsymbol{U}_i^{n+1}-\boldsymbol{U}_i^n|}{|\boldsymbol{U}_i^n|}<5\times10^{-6}$ 时可判定日冕太阳风模拟达到稳态,否则,令 n 等于 $n+1$,

重复上述运算.

4　模拟结果

在本节中，我们将本文提出的 VR-GSP 重构方法用于 2234 卡林顿周(CR 2234)的日冕太阳风模拟. 为了说明该方法的有效性，我们将该方法和 Feng 等(2019)中的 LSQ-GSP 重构方法的模拟结果做了比较. 为便于描述，我们将应用了 VR-GSP 和 LSQ-GSP 重构方法的隐式 MHD 模型分别简述为 VR-GSP-MHD 模型和 LSQ-GSP-MHD 模型. CR 2234 位于第 24 个太阳活动周的末期，从 2020 年 8 月 11 日开始，到 2020 年 9 月 7 日结束，本文选取 GONG 观测的 2020 年 8 月 25 日的光球层径向磁场作为模型的观测输入生成定态背景太阳风. 图 2 展示的是 CR 2234 位于太阳表面的磁场强度等离子体 β. 在太阳表面大部分区域磁场强度大于 1 Gs (高斯，1 Gs≙10^{-4} T)，等离子体 β 值小于 0.1. 在局部区域，磁场强度最大值大于 20 Gs，相应的等离子体 β 值小于 3×10^{-4}. 在本文模拟中，时间步长 Δt 大约为 0.0054 h，VR-GSP-MHD 模型和 LSQ-GSP-MHD 模型分别经过 6699 次和 7778 次时间推进达到稳定状态，所需计算时间 $t_{\rm wall}$ 分别为 6858 s 和 9152 s. 模型计算均在国家超级计算天津中心的 Th-1A 超级计算机(https://www.nscc-tj.cn/)上进行，使用了 12 个计算节点，且每个计算节点配有两个 Intel Xeon X5670 CPU(2.93 GHz, 6 核).

4.1　太阳附近的日冕结构

根据汤姆逊散射原理得到的白光偏振图可以较好地反映近太阳区域的等离子体密度的分布(Hayes et al., 2001; Linker et al., 1999; Feng, 2020a)，图 3 分别展示了来自 SOHO 飞船(Brueckner et al., 1995)的广角光谱日冕仪观测结果(a, b)(下载网址 https://stereo-ssc.nascom.nasa.gov/browse/)和由 VR-GSP-MHD 模型模拟结果所得的白光偏振图(c, d)，以及在所选子午面上的磁力线结构(e, f). 在 $\phi=180°-0°$ 的子午面上，VR-GSP-MHD 模型在 $\phi=180°$ 和 $\phi=0°$ 的半平面上分别重现了南纬 10°和赤道附近沿太阳径向延伸的盔状明亮结构；在 $\phi=270°$ 和 $\phi=90°$ 的半平面上，分别重现了在赤道和北纬 10°沿太阳径向方向延伸的明亮结构. (e)和(f)图中的磁力线结构进一步表明上述观测和模拟所得的明亮结构为冕流结构.

图 4 展示的是模拟得到的子午面上的太阳风速度和等离子体数密度的分布云图，云图上的带箭头实线表示磁力线，箭头表示磁力线的方向. 图 5 展示了太阳风速度、等离子体数密度和温度在 2.6R_s 和 20R_s 的分布概略图. 在图 4 中，低速高密度等离子体流主要集中在 $\phi=180°$ 半平面的以南纬 10°为中心和 $\phi=0°$ 平半面的以北纬 10°为中心，以及 $\phi=270°$ 半平面的以北纬 10°为中心和 $\phi=90°$ 平面的以赤道为中心的大约 30°范围的区域，高速低密度流则占据了中高纬区域，这体现出了极小年日冕太阳风的较为显著的结构特征. 在图 5 中，磁场中性线在 70°—210°经度范围有一个向南弯曲大约 15°范围的圆弧结构，在其余经度范围则平缓分布，VR-GSP-MHD 模型中的磁场中性线位置和低速高密度等离子体流比较集中的区域基本重合. 该卡林顿周的磁中性线比较平缓，仅分布在赤道附近北纬 10°和南纬 10°的范围内，从而导致高速低密度流占据了中纬和高纬区域. 在 2.6R_s 处，VR-GSP-MHD 模型和 PFSS 模型产生的磁中性线位形基本一致，但存在细微的差异. 由于 PFSS 模型将太阳表面和源表面间的磁场简化为势场，源表面外的磁场则根据源表面的径向磁场简单外推得到，并没有考虑磁场和等离子体流的相互作用，而 VR-GSP-MHD 模型所生成的定态太阳风中的磁场是初始的势场和等离子体流相互作用的结果，因此两者结果中的磁中性线位形存在一定的差异.

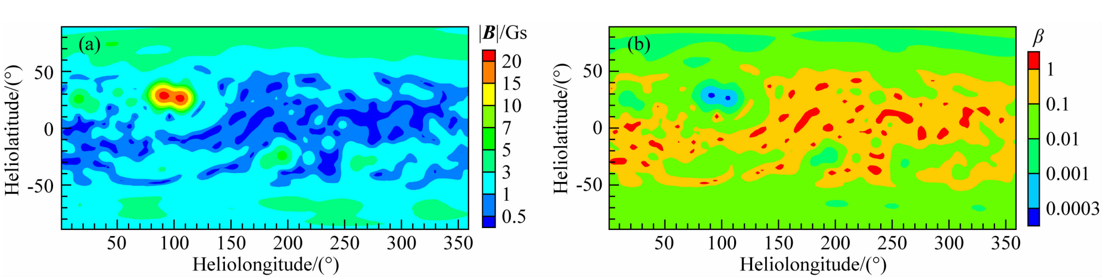

图 2　太阳表面的磁场强度(Gs)(a)和等离子体 β(b)的概略图

Fig. 2　Synoptic maps of the magnetic field strength in units of Gauss (a) and the plasma β distribution (b) near the solar surface

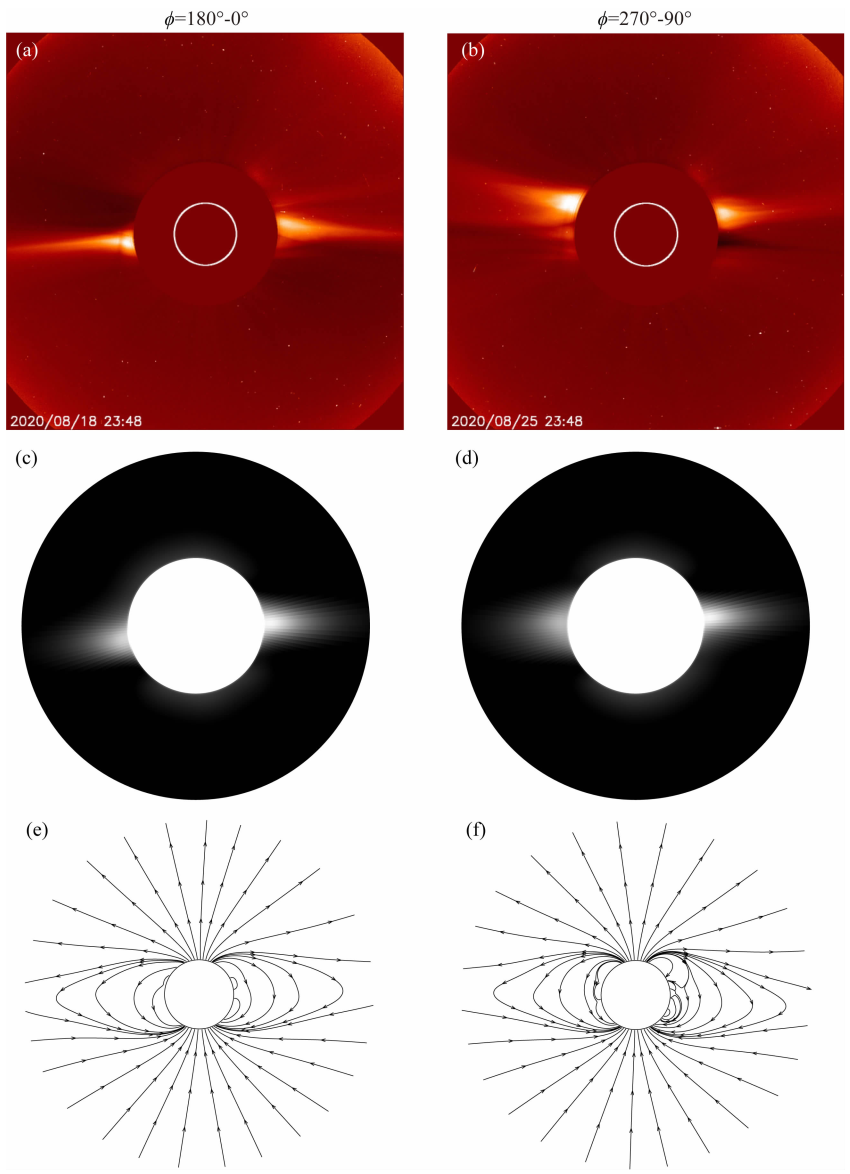

图3 SOHO飞船上的Large Angle and Spectrometric Coronagraph C2 (LASCO-C2)日冕仪观测的白光偏振亮度图(a,b)和使用VR-GSP-MHD模型模拟所得ϕ=180°−0°和ϕ=270°−90°两个所选子午面上的2.3~6R_s范围内的白光偏振亮度图(c,d)以及在这两个子午面上1~5R_s范围内的磁力线分布图(e,f)

Fig. 3 White-light polarized brightness (pB) images observed from LASCO-C2/SOHO (a,b), and simulated images from 2.3 to 6R_s on the meridian planes of ϕ=180°−0° and ϕ=270°−90° that are synthesized from the results of the VR-GSP-MHD model (c,d), and the simulated magnetic field lines from 1 to 5R_s on the two selected meridian plans (e,f)

图6展示了用VR-GSP-MHD和LSQ-GSP-MHD模型得到的径向速度和质子数密度的以10为底的对数在(θ,ϕ)=(5°,250°)的电流片附近和(θ,ϕ)=(−70°,250°)的冕洞区域沿太阳径向方向从1R_s到20R_s的分布图.两种方法模拟的分布曲线基本重合,从4R_s到20R_s,低速流从60 km·s^{-1}增长到300 km·s^{-1},高速流从195 km·s^{-1}增长到660 km·s^{-1},和由Pätzold等(1997)的日冕观测导出的结果一致.

图7展示了由1 AU处的OMNI观测数据根据弹道理论(Feng et al., 2017; Li et al., 2018; Yang et al., 2012)近似反演到20R_s的和分别由VR-GSP-MHD模型和LSQ-GSP-MHD模型模拟得到的径向速度和径向磁场极性.两个MHD模型模拟结果的径向速度和径向磁场极性的分布线图基本重合,和OMNI观测结果相比,模拟结果的速度峰(≥550 km·s^{-1})向右偏移了30°,在0°−100°和180°−360°则和OMNI观测反演结果基本吻合.此外,VR-GSP-MHD模型和LSQ-GSP-MHD模型模拟的定态太阳风径向速度与OMNI观测反演到

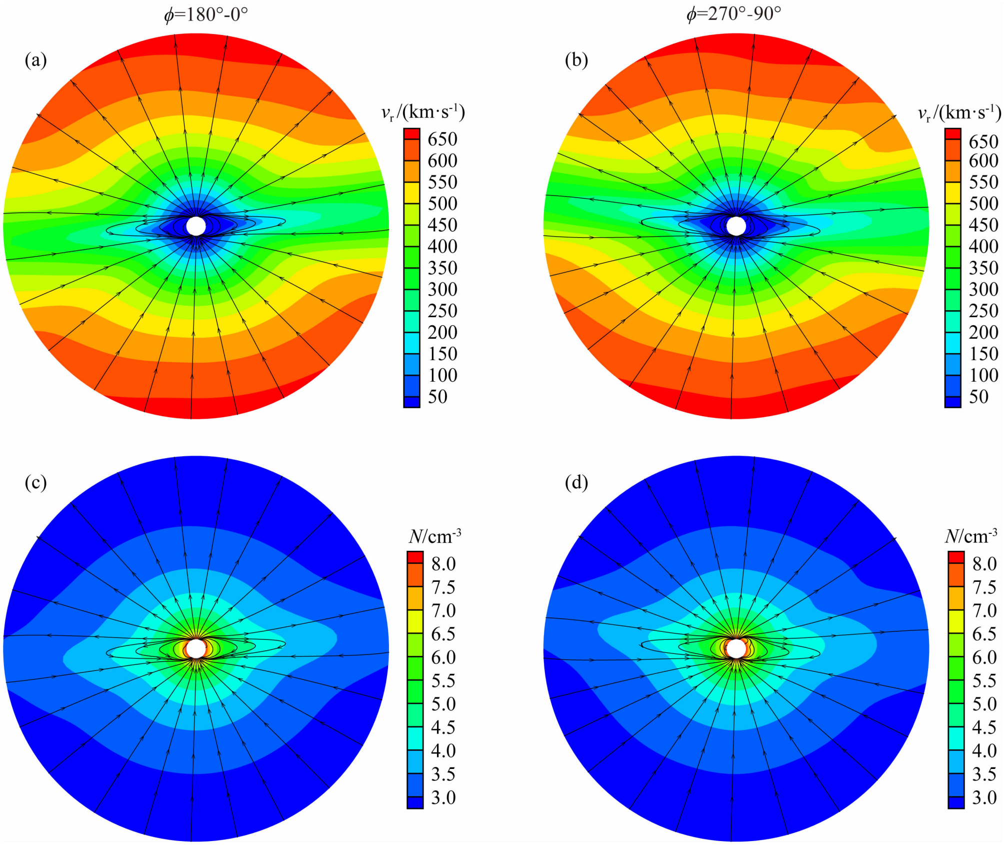

图 4　使用 VR-GSP-MHD 模型模拟所得的在 $\phi=180°-0°$(a，c)和 $\phi=270°-90°$(b，d)两个子午面上的 1～20R_s 范围内径向速度 v_r(km·s^{-1})(a，b)，质子数密度(cm^{-3})以 10 为底的对数 N(c，d). 云图中黑色带有箭头的实线代表磁力线

Fig. 4　Magnetic field lines from 1 to 20R_s overlaid on contours of the radial speeds v_r(km·s^{-1}) (a，b) and the decadic logarithms of the proton number density (cm^{-3}) (c，d) on the meridian planes of $\phi=180°-0°$ (a,c) and $\phi=270°-90°$ (b,d)

20R_s 处的径向太阳风速度的相关系数分别为 0.709 和 0.698，平均相对差

$$\mathrm{diff}_{\mathrm{ave},v_r^{\text{VR-GSP}}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|v_{r,i}^{\text{VR-GSP}}-v_{r,i}^{\text{Map}}|}{v_{r,i}^{\text{Map}}}$$

和

$$\mathrm{diff}_{\mathrm{ave},v_r^{\text{LSQ-GSP}}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{|v_{r,i}^{\text{LSQ-GSP}}-v_{r,i}^{\text{Map}}|}{v_{r,i}^{\text{Map}}}$$

的值都约为 0.12，在 $\mathrm{diff}_{\mathrm{ave},V_r^{\text{VR-GSP}}}$ 和 $\mathrm{diff}_{\mathrm{ave},V_r^{\text{LSQ-GSP}}}$ 表达式中，N 表示样本点的数量，本文取 $N=180$. 在图 7b 中，VR-GSP-MHD 模型和 LSQ-GSP-MHD 模型模拟的径向磁场极性相对于 OMNI 反演数据的命中率皆为 70.7%. 总体来说，两种方法的模拟结果和 OMNI 观测数据基本匹配，不匹配之处可能和模型中未考虑的小规模的瞬时事件、太阳光球层磁场观测的不完善之处、以及用过于简单的方法将观测结果从 1 AU 反演到 20R_s 处等因素有关.

4.2　VR-GSP-MHD 模型和 LSQ-GSP-MHD 模型性能的比较

参考 Feng 等(2019)，Hopkins(2016)和 Powell 等(1999)，我们分别定义单个网格单元 cell$_i$ 和整个计算区域内的平均磁场散度误差 $\mathrm{Error}(\boldsymbol{B})_i$ 和 $\mathrm{Error}(\boldsymbol{B})^{\mathrm{ave}}$ 为

$$\mathrm{Error}(\boldsymbol{B})_i=\frac{\Delta h_i\,|(\nabla\cdot\boldsymbol{B})_i|}{|\boldsymbol{B}_i|},$$

$$\mathrm{Error}(\boldsymbol{B})^{\mathrm{ave}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Error}(\boldsymbol{B})_i$$

其中，Δh_i 和 $(\nabla\cdot\boldsymbol{B})_i$ 分别和方程(15)与方程(11)中的定义一致.

图 8 和图 9 展示的均是关于磁场散度误差的结果. 从图 8 中可以看出，在时间推进过程中，由 VR-GSP 和 LSQ-GSP 两种方法模拟得到的平均磁场散度误差保持在同一个量级上. 起初，两种磁场散度消去方法中的平均磁场散度误差呈上升趋势，大约在 10 h 处达到峰值，分别为 10^{-5} 和 $10^{-4.9}$，最终两种方法都能将磁场散度误差控制在 $10^{-5.5}$ 以下. 图 9 显示的是稳态结果的磁场散度误差在子午面上的分布，显然，在大部分区域的磁场散度误差 $\mathrm{Error}(\boldsymbol{B})_i$ 都小于 10^{-7}.

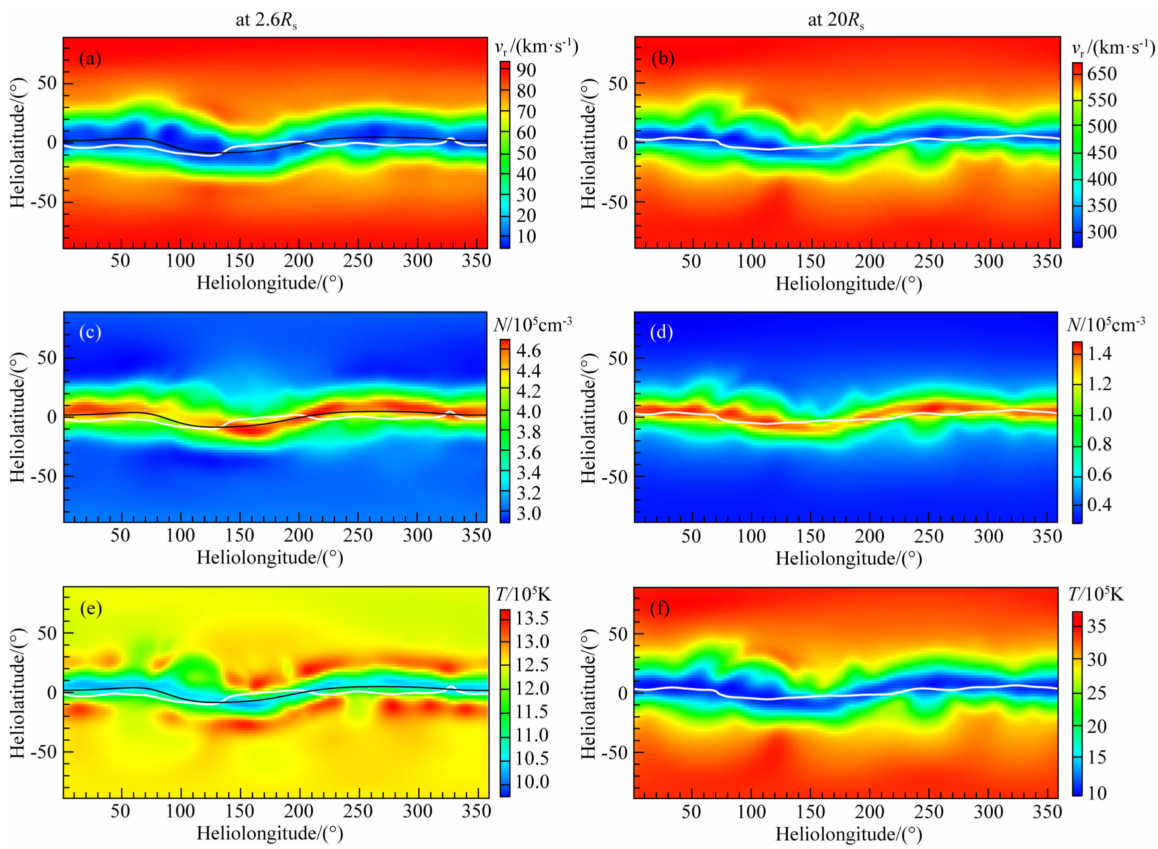

图 5 由 VR-GSP-MHD 模型模拟得到的位于 2.6R_s 处(a,c,e)和 20R_s 处(b,d,f)的太阳风径向速度 v_r(km·s^{-1})(a,b)和质子数密度 N(10^5 cm^{-3})(c,d)以及等离子体温度 T(10^{5}K)(e, f)的概略图.图中白色实线和黑色实线分别表示由 VR-GSP-MHD 模型和 PFSS 模型产生的磁中性线(B_r=0)的位置.

Fig. 5 Synoptic maps of the radial speeds v_r(km·s^{-1}) (a,b), the proton number density (10^5 cm^{-3}) (c,d), and the temperature T(10^{5}K) (e,f) from the VR-GSP-MHD model at 2.6R_s(a,c,e) and 20R_s(b,d,f). The black solid and white solid lines denote the magnetic neutral lines (MNLs) from the PFSS and the VR-GSP-MHD models, respectively

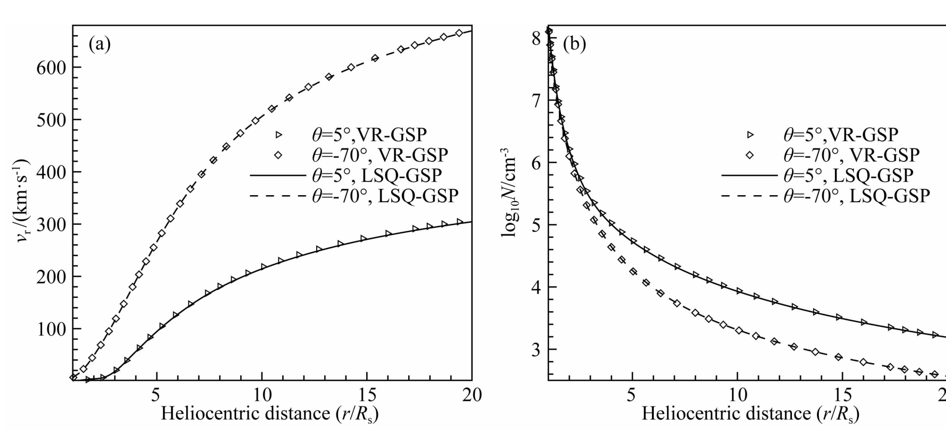

图 6 径向太阳风速度 v_r(km·s^{-1})(a)和质子数密度(cm^{-3})的以 10 为底的对数 N(b)沿日心距离的分布.三角形和黑色实线分别表示由 VR-GSP-MHD 模型和 LSQ-GSP-MHD 模型得到的位于电流片附近的低速高密度流,菱形图标和黑色虚线分别表示由 VR-GSP-MHD 模型和 LSQ-GSP-MHD 模型得到的位于冕洞区域的高速低密度流

Fig. 6 Radial profiles of the radial speeds v_r(km·s^{-1}) (a) and the decadic logarithms of proton number density (cm^{-3}) (b). The triangles and solid lines represent the profiles of the high-density and low-speed streams from VR-GSP-MHD and LSQ-GSP-MHD models, and the diamonds and dashed lines denote the variations of the low-density and high-speed streams from VR-GSP-MHD and LSQ-GSP-MHD models

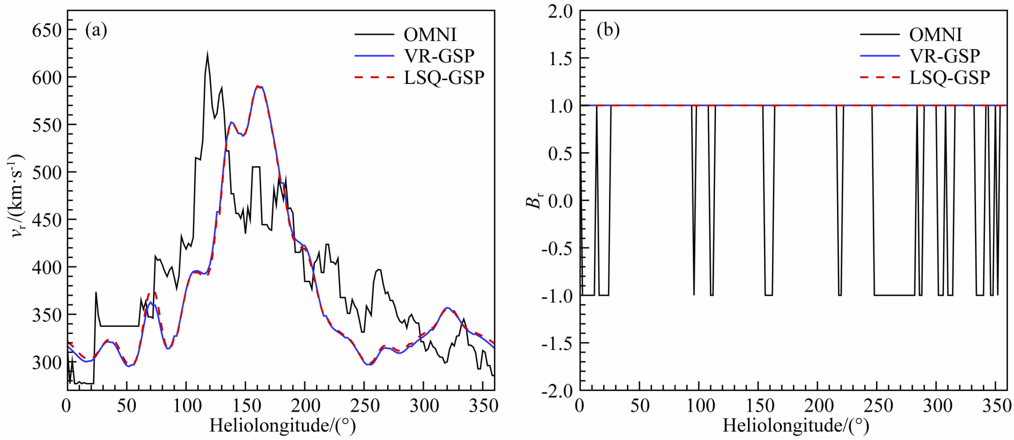

图 7　模拟和观测所得的径向速度 v_r(km・s^{-1})(a)和径向磁场极性(−1 表示指向日心的方向，+1 表示远离太阳的方向)(b)随日球经度的分布图. 图中黑色实线表示 Wind 卫星在 1 AU 处的行星际观测值被映射到 $20R_s$ 处的值，蓝色实线和红色虚线分别表示由 VR-GSP-MHD 模型和 LSQ-GSP-MHD 模型得到的 $20R_s$ 处的径向速度和径向磁场极性

Fig. 7　Temporal profiles of the modeled and observed radial speeds v_r(km・s^{-1}) (a) and the radial magnetic field polarities (b) with "−1" denoting the field pointing to the Sun and "+1" the field directing away from the Sun at $20R_s$. The black solid lines denote the mapped observations in situ interplanetary measurements, and the blue solid lines and red dashed lines denote the modeled results at $20R_s$ by VR-GSP-MHD and LSQ-GSP-MHD models, respectively

在图 10 和图 11 中，我们展示了分别由 VR-GSP-MHD 和 LSQ-GSP-MHD 得到的位于子午面 $\phi=180°-0°$和 $\phi=270°-90°$以及 $2.6R_s$ 和 $20R_s$ 处的质子数密度的相对差 $\mathrm{diff}_{\rho,i}=|\rho_i^{\text{VR-GSP}}-\rho_i^{\text{LSQ-GSP}}|/\rho_i^{\text{VR-GSP}}$ 的分布. 从图中可以看出，两种方法得到的质子数密度相对差的最大值出现在低速高密度区域集中的低纬度区域，大部分区域数密度的相对差小于 0.04.

在表 1 中，我们比较了在太阳风模拟中 VR-GSP 和 LSQ-GSP 的计算效率. 表 1 分别列出了本文用 VR-GSP-MHD 和 LSQ-GSP-MHD 模型模拟 CR 2234 太阳风日冕结构达到稳定状态时所需的计算时间 t_{wall}(单位：h)、迭代次数以及每次迭代所用的时间(单位：s). 两者相比，我们可以看出 VR-GSP 不仅减少了每一步迭代计算所用的时间，也减少了模拟至稳定状态所需要的总的迭代次数，从而也说明了基于 VR-GSP 的 MHD 模拟的计算效率更高.

表 1　VR-GSP-MHD 和 LSQ-GSP-MHD 模型计算效率的对比

Table 1　Comparison between computational efficiency of the VR-GSP-MHD and LSQ-GSP-MHD models

	t_{wall}(h)	迭代次数	每次迭代所用时间(s)
VR-GSP-MHD 模型	1.905	6699	1.0237
LSQ-GSP-MHD 模型	2.542	7778	1.1767

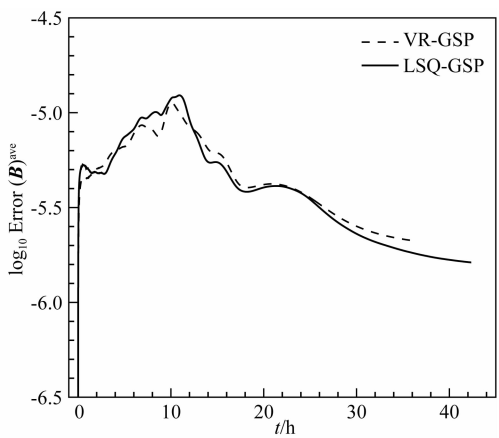

图 8　由 VR-GSP-MHD(虚线)和 LSQ-GSP-MHD(实线)模型模拟的平均磁场散度误差以10为底的对数随松弛时间的演化图

Fig. 8　Temporal evolution profiles of Error$(\boldsymbol{B})^{\text{ave}}$ modeled by VR-GSP-MHD (dashed line) and LSQ-GSP-MHD (solid line) models

5　总结和展望

在本文中，我们基于变分重构提出一种可以消去磁场散度误差的重构方法，并将其简称为 VR-GSP. 通过上述对 CR 2234 期间的日冕太阳风的模拟表明，本文提出的 VR-GSP 方法不仅在消去磁场散度误差方面可以达到 LSQ-GSP 方法相近的效果，而且模拟出的日冕太阳风结构和观测结果基本一致. 和 LSQ-GSP 方法相比，VR-GSP 方法在一次时间推进中平均所需的计算时间减少了 13.0%，达到稳态所需要的时间推进次数减少了 13.9%，达到稳态所需计算时间减少了 25.1%，可以在一定程度上提高计算效率.

由于变分重构法紧致,易于推广到高阶重构,因此本文中的方法有望进一步应用到高阶(>2 阶)的三维太阳风 MHD 建模中. 同时,把 VR-GSP 方法进一步用于数据驱动的太阳风数值模拟(Feng et al., 2012b,2015; 李会超等,2019)、行星际模拟(Guo et al., 2021)并且结合航天器联合观测(Zhang et al., 2022)进行 MHD 模型验证是我们正在考虑的下一步工作.

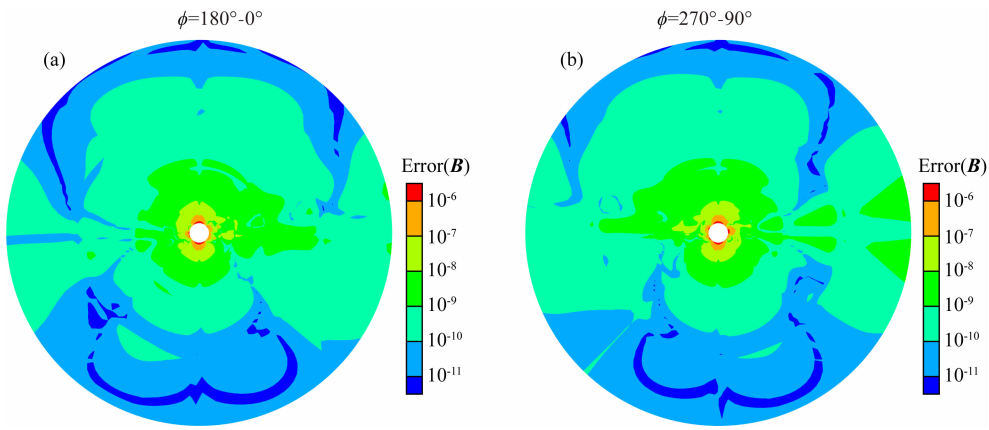

图 9 由 VR-GSP-MHD 模型得到的相对磁场散度误差在所选取的两个子午面上 1~20R_s 范围内的分布云图

Fig. 9 Contour maps from 1 to 20R_s for the relative divergence errors of the magnetic field obtained from the VR-GSP-MHD model on the selected meridian planes

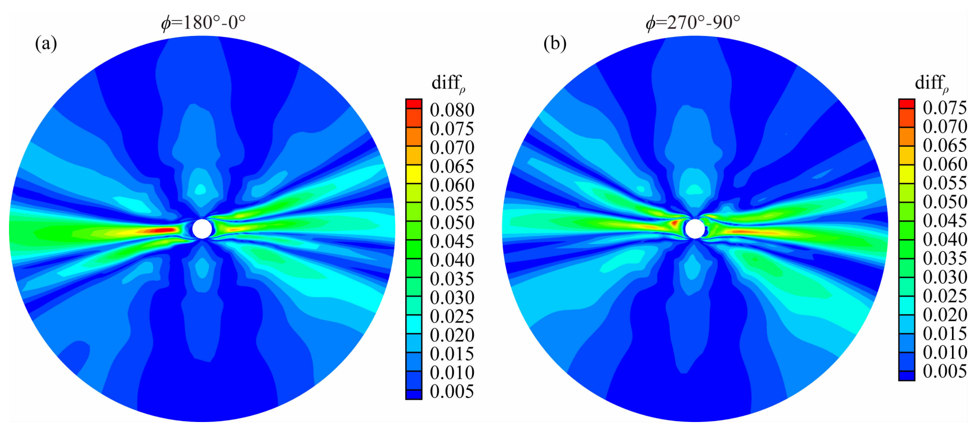

图 10 由 VR-GSP-MHD 和 LSQ-GSP-MHD 模型得到质子数密度的相对差 diff$_\rho$ 在 ϕ=180°-0°(a)和 φ=270°-90°(b)子午面 1~20R_s 范围内的分布云图

Fig. 10 Contour maps from 1 to 20R_s for the relative differences of proton number density diff$_\rho$ on the meridional planes of ϕ=180°-0° (a) and ϕ=270°-90° (b)

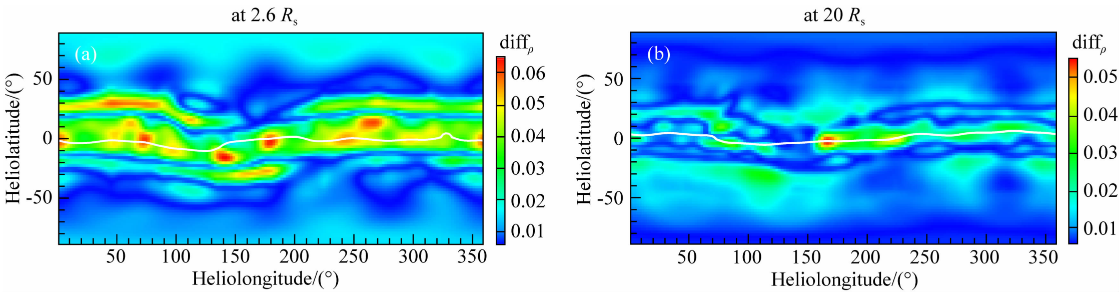

图 11 由 VR-GSP-MHD 和 LSQ-GSP-MHD 模型得到质子数密度的相对差在 2.6R_s 处(a)和 20R_s 处(b)的分布云图,白线表示 VR-GSP-MHD 模型模拟结果中的磁中性线

Fig. 11 Synoptic maps for the relative differences of the plasma density diff$_\rho$ at 2.6R_s (a) and 20R_s(b). The white lines denote the MNLs from the VR-GSP-MHD model

致谢 本文工作使用了太阳全球振荡监测网(GONG)项目提供的数据. GONG 项目由 AURA, Inc. 运营的美国国家太阳观测台根据与美国国家科学基金会的合作协议管理. 也使用了SOHO飞船上的LASCO C2 日冕仪和太阳动力学天文台(SDO)的大气成像组件(AIA) 获得的数据. 此外,我们还使用了 NASA/GSFC 的 OMNIWeb 系统提供的数据,OMNI 数据可由网址:https://cdaweb.gsfc.nasa.gov/index.html/下载. 本文中的计算在国家超级计算天津中心的 Th-1A 超级计算机上完成.

References

Abbo L, Ofman L, Antiochos S K, et al. 2016. Slow solar wind: Observations and modeling. *Space Sci. Rev.*, 201(1-4): 55-108, doi: 10.1007/s11214-016-0264-1.

Arge C N, Luhmann J G, Odstrcil D, et al. 2004. Stream structure and coronal sources of the solar wind during the May 12th, 1997 CME. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*, 66(15-16): 1295-1309, doi: 10.1016/j.jastp.2004.03.018.

Barth T, Jespersen D. 1989. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. //27th Aerospace Sciences Meeting. Reno, NV, USA: AIAA, doi: 10.2514/6.1989-366.

Barth T. 1991. A 3-D upwind Euler solver for unstructured meshes. //10th Computational Fluid Dynamics Conference. Honolulu, HI, USA: AIAA, doi: 10.2514/6.1991-1548.

Barth T. 1993. Recent developments in high order K-exact reconstruction on unstructured meshes. //31st Aerospace Sciences Meeting. Reno, NV, USA: AIAA, doi: 10.2514/6.1993-668.

Brackbill J U, Barnes D C. 1980. The effect of nonzero $\nabla \cdot \boldsymbol{B}$ on the numerical solution of the magnetohydrodynamic equations. *Journal of Computational Physics*, 35(3): 426-430, doi: 10.1016/0021-9991(80)90079-0.

Brueckner G E, Howard R A, Koomen M J, et al. 1995. The large angle spectroscopic coronagraph (LASCO). *Sol. Phys.*, 162(1-2): 357-402, doi: 10.1007/BF00733434.

Cranmer S R, Winebarger A R. 2019. The properties of the solar corona and its connection to the solar wind. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 57(1): 157-187, doi: 10.1146/annurev-astro-091918-104416.

Dedner A, Kemm F, Kröner D, et al. 2002. Hyperbolic divergence cleaning for the MHD equations. *Journal of Computational Physics*, 175(2): 645-673, doi: 10.1006/jcph.2001.6961.

Dellar P J. 2001. A note on magnetic monopoles and the one-dimensional MHD Riemann problem. *Journal of Computational Physics*, 172(1): 392-398, doi: 10.1006/jcph.2001.6815.

Evans C R, Hawley J F. 1988. Simulation of magnetohydrodynamic flows—A constrained transport method. *The Astrophysical Journal*, 332: 659-677, doi: 10.1086/166684.

Feng X S, Zhou Y F, Wu S T. 2007. A novel numerical implementation for solar wind modeling by the modified conservation element/solution element method. *The Astrophysical Journal*, 655(2): 1110-1126, doi: 10.1086/510121.

Feng X S, Yang L P, Xiang C Q, et al. 2010. Three-dimensional solar wind modeling from the Sun to Earth by a SIP-CESE MHD model with a six-component grid. *The Astrophysical Journal*, 723(1): 300-319, doi: 10.1088/0004637x/723/1/300.

Feng X S, Yang L P, Xiang C Q, et al. 2012a. Validation of the 3D AMR SIP-CESE solar wind model for four Carrington rotations. *Sol. Phys.*, 279(1): 207-229, doi: 10.1007/s11207-012-9969-9.

Feng X S, Jiang C W, Xiang C Q, et al. 2012b. A data-driven model for the global coronal evolution. *The Astrophysical Journal*, 758(1): 62, doi: 10.1088/0004-637x/758/1/62.

Feng X S, Zhong D K, Xiang C Q, et al. 2013. GPU-accelerated computing of three-dimensional solar wind background. *Science China Earth Sciences*, 56(11): 1864-1880, doi: 10.1007/s11430-013-4661-y.

Feng X S, Zhang M, Zhou Y F. 2014. A new three-dimensional solar wind model in spherical coordinates with a six-component grid. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 214(1): 6, doi: 10.1088/0067-0049/214/1/6.

Feng X S, Ma X P, Xiang C Q. 2015. Data-driven modeling of the solar wind from 1 Rs to 1 AU. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, 120(12): 10159-10174, doi: 10.1002/2015JA021911.

Feng X S, Li C X, Xiang C Q, et al. 2017. Data-driven modeling of the solar corona by a new three-dimensional path-conservative Osher-Solomon MHD model. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 233(1): 10, doi: 10.3847/1538-4365/aa957a.

Feng X S, Liu X J, Xiang C Q, et al. 2019. A new MHD model with a rotated-hybrid scheme and solenoidality-preserving approach. *The Astrophysical Journal*, 871(2): 226, doi: 10.3847/1538-4357/aafacf.

Feng X S. 2020a. Magnetohydrodynamic Modeling of the Solar Corona and Heliosphere. Singapore: Springer, doi: 10.1007/978-981-13-9081-4.

Feng X S. 2020b. Cell-centered finite volume methods. //Magnetohydrodynamic Modeling of the Solar Corona and Heliosphere. Singapore: Springer, 125-337.

Feng X S. 2020c. A finite volume MHD code in spherical coordinates for background solar wind. //Magnetohydrodynamic Modeling of the Solar Corona and Heliosphere. Singapore: Springer, 339-429.

Feng X S, Wang H P, Xiang C Q, et al. 2021. Magnetohydrodynamic modeling of the solar corona with an effective implicit strategy. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 257(2): 34, doi: 10.3847/1538-4365/ac1f8b.

Fuchs F G, McMurry A D, Mishra S, et al. 2010. High order well-balanced finite volume schemes for simulating wave propagation in stratified magnetic atmospheres. *Journal of Computational Physics*, 229(11): 4033-4058, doi: 10.1016/j.jcp.2010.01.038.

Feng X S, Xiang C Q, Zhong D K. 2011. The state-of-art of three-dimensional numerical 817 study for corona-interplanetary process of solar storms (in Chinese). *Sci Sin-Terrae*, 41(1): 1-28, doi: 10.

1360/zd-2011-41-1-1.

Feng X S, Xiang C Q, Zhong D K: 2013. Numerical study of interplanetary solar storms (in Chinese). *Sci Sin-Terrae*, 43(6): 912-933, doi:zd-2013-43-6-912.

Groth C P T, De Zeeuw D L, Gombosi T I, et al. 2000. Global three-dimensional MHD simulation of a space weather event: CME formation, interplanetary propagation, and interaction with the magnetosphere. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, 105(A11): 25053-25078, doi: 10.1029/2000JA900093.

Guo X C, Zhou Y C, Wang C, et al. 2021. Propagation of large-scale solar wind events in the outer heliosphere from a numerical MHD simulation. *Earth Planet. Phys.*, 5(3): 223-231, doi:10.26464/epp2021024.

Guo X C. 2015. An extended HLLC Riemann solver for the magneto-hydrodynamics including strong internal magnetic field. *Journal of Computational Physics*, 290: 352-363, doi: 10.1016/j.jcp.2015.02.048.

Harten A, Lax P D, Leer B V. 1983. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1): 35-61, doi: 10.1137/1025002.

Hayes A P, Vourlidas A, Howard R A. 2001. Deriving the electron density of the solar corona from the inversion of total brightness measurements. *The Astrophysical Journal*, 548(2): 1081-1086, doi: 10.1086/319029.

Hopkins P F. 2016. A constrained-gradient method to control divergence errors in numerical MHD. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 462(1): 576-587, doi: 10.1093/mnras/stw1578.

Janhunen P. 2000. A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on HLL and Roe methods. *Journal of Computational Physics*, 160(2): 649-661, doi: 10.1006/jcph.2000.6479.

Li H C, Feng X S, Xiang C Q. 2019. Time-dependent simulation and result validation of interplanetary solar wind. *Chinese Journal of Geophysics* (in Chinese), 62(1): 1-18, doi: 10.6038/cjg2019L0625.

Li C X, Feng X S, Li H C, et al. 2021. Modified path-conservative HLLEM scheme for magnetohydrodynamic solar wind simulations. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 253(1): 24, doi: 10.3847/1538-4365/abd5ab.

Li L Q, Liu X D, Lou J L, et al. 2018. A discontinuous Galerkin method based on variational reconstruction for compressible flows on arbitrary grids. // 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting. Kissimmee, Florida: American Institute of Aeronautics and Astronautics. doi: 10.2514/6.2018-0831.

Linker J A, Mikič Z, Biesecker D A, et al. 1999. Magnetohydrodynamic modeling of the solar corona during whole sun month. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, 104(A5): 9809-9830, doi: 10.1029/1998JA900159.

Liu X D, Lou J L, Li L Q, et al. 2017. A compact high order finite volume method based on variational reconstruction for compressible flows on arbitrary grids. //23rd AIAA Computational Fluid Dynamics Conference. Denver, Colorado: American Institute of Aeronautics and Astronautics. doi: 10.2514/6.2017-3097.

Nakamizo A, Tanaka T, Kubo Y, et al. 2009. Development of the 3-D MHD model of the solar corona-solar wind combining system. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, 114(A7): A07109, doi: 10.1029/2008JA013844.

Nishikawa H. 2018. From hyperbolic diffusion scheme to gradient method: Implicit Green-Gauss gradients for unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 372(C): 126-160, doi: 10.1016/j.jcp.2018.06.019.

Otero E, Eliasson P. 2015a. Acceleration on stretched meshes with line-implicit LU-SGS in parallel implementation. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 29(2): 133-149, doi: 10.1080/10618562.2015.1021692.

Otero E, Eliasson P. 2015b. Parameter investigation with line-implicit lower-upper symmetric Gauss-Seidel on 3D stretched grids. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 29(3-5): 313-324, doi: 10.1080/10618562.2015.1063618.

Parker E N. 1963. Interplanetary Dynamical Processes. New York: Interscience Publishers.

Pätzold M, Tsurutani B T, Bird M K. 1997. An estimate of large-scale solar wind density and velocity profiles in a coronal hole and the coronal streamer belt. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, 102(A11): 24151-24160, doi: 10.1029/97JA01868.

Powell K G, Roe P L, Linde T J, et al. 1999. A solution-adaptive upwind scheme for ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 154(2): 284-309, doi: 10.1006/jcph.1999.6299.

Reiss M A, MacNeice P J, Mays L M, et al. 2019. Forecasting the ambient solar wind with numerical models. I. On the implementation of an operational framework. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 240(2): 35, doi: 10.3847/1538-4365/aaf8b3.

Saad Y, Schultz M H. 1986. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7(3): 856-869, doi: 10.1137/0907058.

Steinolfson R S, Hundhausen A J. 1988. Density and white light brightness in looplike coronal mass ejections: Temporal evolution. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, 93(A12): 14269-14276, doi: 10.1029/JA093iA12p14269.

Tanaka T. 1994. Finite volume TVD scheme on an unstructured grid system for three-dimensional MHD simulation of inhomogeneous systems including strong background potential fields. *Journal of Computational Physics*, 111(2): 381-389, doi: 10.1006/jcph.1994.1071.

van Der Holst B, Keppens R. 2007. Hybrid block-AMR in cartesian and curvilinear coordinates: MHD applications. *Journal of Computational Physics*, 226(1): 925-946, doi: 10.1016/j.jcp.2007.05.007.

Wang Q, Ren Y X, Pan J H, et al. 2017. Compact high order finite volume method on unstructured grids III: Variational reconstruction. *Journal of Computational Physics*, 337: 1-26. doi: 10.1016/j.jcp.2017.02.031.

Wang Y, Feng X S, Zhou Y F, et al. 2019. A multi-GPU finite volume solver for magnetohydrodynamics-based solar wind simulations. *Computer Physics Communications*, 238: 181-193, doi: 10.1016/j.cpc.2018.12.003.

Wu K L, Shu C W. 2019. Provably positive high-order schemes for ideal magnetohydrodynamics: analysis on general meshes. *Numerische Mathematik*, 142(4): 995-1047, doi: 10.1007/s00211-019-01042-w.

Yalim M S. 2008. An artificial compressibility analogy approach for compressible ideal MHD: Application to space weather simulation [Ph. D. thesis]. Bruxelles: Université Libre de Bruxelles.

Yang L P, Feng X S, Xiang C Q, et al. 2012. Time-dependent MHD modeling of the global solar corona for year 2007: Driven by daily-updated magnetic field synoptic data. *J. Geophys. Res.: Space Phys.*, 117(A8): A08110, doi: 10.1029/2011JA017494.

Yee K. 1966. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 14(3): 302-307, doi: 10.1109/TAP.1966.1138693.

Yoon S, Jameson A. 1988. Lower-upper Symmetric-Gauss-Seidel method for the Euler and Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*, 26(6): 1025-1026, doi: 10.2514/3.10007.

Zhang A B, Kong L G, Li W Y, et al. 2022. Tianwen-1 MINPA observations in the solar wind. *Earth Planet. Phys.*, 6(1):1-9, doi:10.26464/epp2022014.

Zhang M, Feng X S. 2016. A comparative study of divergence cleaning methods of magnetic field in the solar coronal numerical simulation. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, 3: 6, doi: 10.3389/fspas.2016.00006.

附中文参考文献

冯学尚,向长青,钟鼎坤. 2011. 太阳风暴的日冕行星际过程三维数值研究进展. 中国科学:地球科学,41(1): 1-28, doi:10.1360/zd-2011-41-1-1.

冯学尚,向长青,钟鼎坤. 2013. 行星际太阳风暴的数值模拟研究. 中国科学:地球科学,43(6): 912-933, doi:zd-2013-43-6-912.

李会超,冯学尚,向长青. 2019. 时变行星际太阳风模拟及其结果评估. 地球物理学报,62(1):1-18,doi:10.6038/cjg2019L0625.

(本文编辑 胡素芳)